

Глава 8. Математические модели среды трещиноватых зон

8.1. Общая формулировка проблемы динамики пористых насыщенных сред

В данной главе продолжается исследование пористых сред, разрывных нарушений, динамики флюидов, а также физико-механических свойств горных пород, начатое в предыдущей главе. Оно включает в себя формулировку определяющих соотношений и краткий обзор по соответствующим специальным разделам механики этих сред. Данные исследования (обзорного и аналитического характера) необходимы для математического моделирования этих процессов в массивах верхней коры.

Любая горная порода характеризуется своими определяющими соотношениями, устанавливающими связь между тензорами напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} . Их условно можно разделить на уравнения состояния (для упругих тел) и реологические уравнения. Последние связаны с необратимыми деформациями сплошной среды, поскольку по-гречески "рео" – означает течь. Многие авторы отождествляют термины "определяющие" и "реологические" уравнения. Такая точка зрения имеет право на существование, поскольку существуют среды (например, вязкоупругие), которые объединяют в себе оба указанных аспекта.

Горные породы обладают не только особыми реологическими свойствами, но и некоторой микроструктурой. В этой связи здесь и ниже дадим некоторые базовые определения. *Гомогенными* средами называются среды, микронеоднородности которых имеют атомно-молекулярные размеры. Определяющие соотношения гомогенных сред должны удовлетворять следующим фундаментальным принципам.

1. *Принцип детерминизма* (иногда его называют *принципом причинности*). Тензор напряжений σ_{ij} и вектор теплового потока \vec{q} в каждый момент времени определяются только предыдущей историей деформационного и термического состояний и не зависят от будущих состояний. Последнее означает, что тензор напряжений в данный момент является функционалом всех предшествующих значений кинематических величин.

2. *Инвариантность определяющих уравнений*. Эти уравнения должны быть инвариантными относительно вращения и трансляции системы координат. Форма законов механики сплошной среды не зависит от выбора системы координат.

3. *Принцип локальности*. Принцип локальности формулируется для *элементарного объема*. На реакцию элементарного объема гомогенной среды другие части среды влияют только через границы этого объема. Любое дальнедействующее взаимодействие частиц среды запрещено.

4. *Принцип локального термодинамического равновесия*. Он позволяет ввести для гомогенных сред термодинамические функции и использовать аппарат термодинамики.

5. *Принцип термодинамической согласованности*. Уравнения механики сплошной среды не должны противоречить второму закону термодинамики. Этот принцип является логическим следствием предыдущего принципа.

Гетерогенными средами являются различного рода смеси, в которых микронеоднородности (зерна) имеют достаточно малые размеры по сравнению с макроразмерами различных процессов, но достаточно большие размеры по сравнению с атомно-молекулярными размерами. Зерна можно рассматривать как гомогенные тела, описываемые механикой сплошной среды. В гетерогенных средах возникают специфические понятия *микро* и *макро масштабов*, которые не идентичны соответствующим поняти-

ям гомогенных сред. Трещиновато-пористые среды являются частным случаем гетерогенных сред.

В гетерогенных средах выполняются все указанные принципы гомогенных сред. К ним добавляются условия, вытекающие из определения гетерогенных сред, а также соответствующее определение элементарного объема гетерогенных сред. Его линейные размеры должны быть много меньше макроразмера, но много больше микроразмера зерен.

Третий, четвертый и пятый пункты общих принципов требуют некоторых пояснений. В элементарном объеме гетерогенных сред, кроме внешней границы, есть еще и внутренняя граница, через которую возможно взаимодействие и перенос вещества. С учетом этой границы принцип локальности сохраняется, а принцип локального термодинамического равновесия обобщается на каждую из фаз.

К геологическим средам эти принципы далеко не всегда применимы. В геоматериалах размеры неоднородностей (в частности, трещин и разломов) меняются от субатомных до гигантских размеров планетарных масштабов. Поэтому вполне допустима ситуация, когда размеры случайных неоднородностей могут быть соизмеримы с размерами исследуемого процесса. Тогда принципы механики гетерогенных сред в ее классическом виде неприменимы. Другими словами, геологические среды в общем случае не относятся к классу гетерогенных сред в смысле механики сплошной среды. Соответствующее обобщение теории гетерогенных сред можно условно назвать теорией *случайных трещиноватых сред*. Целесообразно также произвести уточнение терминологии механики случайных сред. Если случайные неоднородности того же размера, что и размер исследуемого процесса, то понятия *макроразмера* и *микроразмера* теряют свой смысл. Вместо них введем аналогичные им понятия *актуального* размера (процесса, явления, уровня) и *случайного* размера (процесса, явления, уровня).

Если в механике случайных трещиноватых сред отказаться от принципа локальности явления, то многие результаты и элементы математического аппарата гетерогенных сред могут быть перенесены (или обобщены) и на рассматриваемую особую ситуацию. Отказ от принципа локальности, в частности, приведет к тому, что определяющие соотношения будут иметь форму интегро-дифференциальных выражений по пространственным координатам.

Определяющие соотношения содержат общую информацию о природе физических процессов в трещиновато-пористых средах. Вид этих уравнений зависит от давления, температуры, времени нагрузки и пространственного масштаба массива горных пород. Более детальная информация о конкретных процессах содержится в граничных и дополнительных условиях, а также в геометрии и структуре самих краевых задач. Тем не менее, анализ определяющих соотношений может оказаться весьма полезным.

Есть два состояния горных пород (упругое и вязкое), существование которых у большинства специалистов не вызывает сомнения и которые описываются достаточно простыми средствами. Они соответствуют очень быстрым или очень медленным процессам. Мы можем наблюдать, например, следующие два связанных с ними типа явлений: распространение упругих волн и смятие слоев в складки. Плавные и гладкие складчатые структуры обычно ассоциируются с вязкой реологией.

При математическом моделировании геологических процессов в массивах коры обычно используются только эти две реологические модели, которые можно рассматривать как крайние состояния пород. Им соответствуют две модели пористых деформируемых сред – пороупругая и поровязкая, которые рассматриваются в данной главе. Пороупругие процессы иногда называют *упругой консолидацией*, а поровязкие – *компрессией*. Ниже основное внимание уделяется именно этим двум моделям пористых сред.

В действительности же поведение горных пород более многообразно. В опреде-

ленных условиях эти породы ведут себя как вязкоупругие, пластичные тела или как сплошные среды с другими особыми свойствами. Использование более сложных реологических моделей требует достаточно убедительных доводов в их необходимости. Однако идентификация сложной реологии и ее описание вызывают затруднение. Грубость и ненадежность экспериментальных данных ограничивают возможности моделирования на основе механики сред с особыми свойствами. Поэтому большое значение приобретают выводы, основанные на общих принципах механики сплошных сред [Трусделл, 1975], а также выводы, вытекающие из анализа наблюдаемых данных.

Деформированное состояние представлено тензором деформаций ε_{ij} , который делится на упругую ε_{ij}^e и пластическую (вязкую) ε_{ij}^p составляющие

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (8.1.1)$$

и может иметь разные формы. Например, тензор деформаций Коши-Грина дается выражением

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (8.1.2)$$

Пористые среды возникают в результате усреднения среды, в которой есть микроскопические трещины или поры. Последние могут быть заполнены флюидом. В пористых средах, кроме деформации элементарного объема, есть еще фильтрация флюида, а тензор напряжений включает в себя поровое давление p

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ef} - \alpha_e p \delta_{ij}. \quad (8.1.3)$$

Здесь σ_{ij}^{ef} – тензор эффективных (по Нуру) напряжений, который зависит от тензора деформаций. Соотношение (8.1.3) впервые ввел Терцаги для влажного песка при $\alpha_e = 1$. Био обобщил это соотношение на пороупругие среды, для которых $0 < \alpha_e < 1$. Иногда его иногда называют соотношением Терцаги-Био. Оно фактически является определением трещиновато-пористой среды. В ней есть скелет и флюид, который фильтруется через скелет. Отличие от тождественного нуля тензора σ_{ij}^{ef} означает существование связанного скелета. В суспензии он обращается в ноль. Состояние скелета описывается парой сопряженных величин σ_{ij}^{ef} и ε_{ij} . Для флюида есть аналогичная пара сопряженных величин p и \vec{s} , где \vec{s} – скорость фильтрации. Тепловой режим характеризуется парой сопряженных величин – температурой T и тепловым потоком \vec{q} .

Рассмотрим теперь некоторые следствия, которые вытекают из приведенного выше фактического материала, касающегося флюидных процессов в верхней коре. В предыдущей главе было показано, что рудные месторождения в континентальной верхней коре в среднем имеют характерную стратификацию по степени концентрации этих веществ. В ней просматривается определенная закономерность: с глубиной концентрация рудных веществ падает. Данный факт заставляет задуматься. Большинство специалистов считает главным поставщиком рудных материалов в кору расплавы основных и ультраосновных пород, поступающих снизу из астеносферы. Указанная закономерность становится еще более удивительной, если учесть непрерывное перемешивание слоев коры в результате тектонических процессов, движений по разломам, а также *денудации* и *аккумуляции* (размывания выступающих частей рельефа и накопления вещества в осадочных бассейнах). Все эти процессы должны были бы нарушить эту стратификацию и привести к выравниванию слоев по концентрации. Как уже говорилось, отсюда напрашивается вывод о том, что существует достаточно быстрый механизм, который непрерывно поддерживает указанную стратификацию.

Совершенно очевидно, что указанный механизм связан с движением флюидов. Флюиды, как правило, являются подвижным и агрессивным агентом, который переносит, преобразует и концентрирует растворимые вещества. Многие из этих веществ (например, углеводороды) являются малорастворимыми в воде. Тем не менее, за геологические периоды времени происходят гигантские по своим масштабам преобразования состава и состояния пород. Следовательно, указанный выше механизм быстрых движений флюидов должен включать в себя многократные повторные движения, которые с успехом выполняют эту функцию.

Повторные движения в трещиновато-пористых насыщенных породах коры в форме тепловой конвекции известны давно и достаточно хорошо исследованы. Существуют веские геологические доказательства ее реальности. Тем не менее, тепловая конвекция не может быть основным механизмом концентрации веществ во всей верхней коре. Тепловой энергии недостаточно для того, чтобы обеспечить непрерывный процесс концентрации веществ в холодных и тектонически спокойных регионах коры. Теплофизические характеристики пород таковы, что тепловое расширение флюида не в состоянии привести к достаточно большим наблюдаемым градиентам порового давления. Есть еще одна причина, по которой тепловая конвекция не может быть универсальным механизмом движения флюидов за геологические промежутки времени. Дело в том, что за указанное время происходит взаимодействие флюидов с деформируемым скелетом пород. При существенных деформациях скелета качественно меняется сам механизм движения флюидов, и тепловая конвекция вообще перестает быть движущим фактором их миграции.

Флюидный режим и процессы разрушения наиболее хорошо исследованы в самых верхних доступных наблюдениям слоях коры за времена, соизмеримые со временем техногенной деятельности. При наличии гидрологической связи водонасыщенных трещиноватых массивов с поверхностью можно рассматривать фильтрацию воды в среде с недеформируемым скелетом. Эти процессы составляют предмет гидрогеологии и инженерной геологии и выходят за рамки данной монографии.

Есть основание полагать, что в более глубоких слоях верхней коры, изолированных от поверхности, центральное место в динамике флюидов занимают два явления – дилатансия и компакция. Именно они могут создавать достаточно большие градиенты порового давления, которые способны перемещать флюиды на большие расстояния за геологические промежутки времени. Разрушение, сопровождающееся дилатансией, может создавать механо-химический эффект [Молчанов и др., 1975; Черский и др., 1985] и быть фактором преобразования пород за геологические промежутки времени [Иванов и др., 1978].

Трудно найти другие физические явления в верхней коре, которые способны в течение столь долгого времени поддерживать высокие градиенты порового давления в масштабах верхней коры. Однако это отнюдь не означает, что только эти два названных процесса всегда являются доминирующими во всем объеме верхней коры. Для них необходимы некоторые условия, которые далеко не всегда выполняются. Если эти условия отсутствуют, то градиенты порового давления падают не менее, чем на порядок.

Изложенные соображения заставляют обратить особое внимание на разрывные нарушения и рассеянную трещиноватость. В фокусе нашего внимания должны находиться эти структуры совместно с динамикой флюидов в них. Заметим, что классическая механика разрушения основана на лабораторных экспериментах. Специфика разрушения в хрупких породах верхней коры состоит в том, что эти процессы подготавливаются за достаточно длительное время, значительно превышающее время лабораторных экспериментов. Поперечные размеры разломов колеблются от сотен метров до десятков километров, что также значительно превышает лабораторные размеры. Следовательно, возможны эффекты, природа которых связана с осреднением микроразрушений на больших

пространственно-временных масштабах и которые, в принципе, не могут быть замечены в лабораторных условиях. По указанной причине простая экстраполяция данных лабораторных экспериментов на масштабы верхней коры требует известной осторожности.

Как было показано выше, некоторые элементы разломной тектоники коры (например, листрические разломы и волноводы) пока еще не находят удовлетворительного объяснения в рамках классической механики разрушения, хотя на уровне физических соображений и не противоречат ей. Например, в отличие от разломов волноводы представляют собой достаточно широкие слои рассеянной трещиноватости. Их возникновение на глубинах средней коры связано с особым режимом разрушения, который мало исследован. При этом область трещиноватости отделяется от сплошной среды внутренней границей, которая может двигаться относительно среды. Условия равновесия и балансовые соотношения на этих границах представляют собой необходимый элемент корректной постановки задачи. В данной главе эта проблема только намечается в самых общих чертах, хотя в будущем она, возможно, превратится в самостоятельный раздел механики сплошной среды.

Изложенные соображения заставляют искать новые подходы к проблеме возникновения и динамики трещиноватой структуры верхней коры. Ниже рассматриваются те аспекты механики разрушения, которые в той или иной степени могли бы пролить свет на указанные нерешенные проблемы. Этим самым как бы очерчивается круг физических задач, которые связаны с моделированием процессов в трещиноватых зонах и структурах разрушения верхней коры.

В некоторых случаях, когда определяющие соотношения неизвестны, они могут быть заменены другими соотношениями, полученными из геофизических измерений. В противном случае краевая задача о динамике данного блока коры является некорректно поставленной (недоопределенной). Как было показано выше, такой величиной, которая компенсирует отсутствие знаний о реологии среды, может быть поле траекторий напряжений. В данной монографии эта проблема также намечается как одно из направлений тектонофизики.

8.2. Динамика флюидов в верхней коре

8.2.1. Фильтрация в среде с жестким скелетом

Породы у поверхности Земли легко поддаются разрушению и различным формам физико-химических преобразований. Близость к поверхности и гидрологическая связь с ней создают условия для фильтрации флюидов в среде с недеформируемым скелетом. Эта фильтрация управляется законом Дарси

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{\eta^f}{k_p} s_i + \rho^f g_i, \quad (8.2.1)$$

где p – поровое давление, g_i – ускорение силы тяжести, k_p – коэффициент проницаемости, ρ^f – плотность флюида, $\vec{s} = f(\vec{w}^f - \vec{w}^s)$ – скорость фильтрации, которая при малой пористости равна $f\vec{w}^f$, где \vec{w}^f , η^f – истинная скорость и коэффициент вязкости флюида, f – пористость. Здесь и ниже величины с индексами s и f относятся соответственно к скелету и флюиду. Ось x_3 координатной системы (x_1, x_2, x_3) направлена вертикально вверх. При быстрых движениях необходимо учитывать еще член, включающий в себя производную по времени. Разумно попытаться ввести его по аналогии с уравнениями гидродинамики Навье-Стокса

$$\rho^f \varphi(k_p) \frac{\partial w_i^f}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\eta^f}{k_p} s_i + \rho^f g_i, \quad (8.2.2)$$

где $\varphi(k_p)$ – некоторая безразмерная функция, учитывающая микроструктуру среды и ее проницаемость, t – время.

Эксперименты при больших скоростях фильтрации свидетельствуют о том, что градиент порового давления является квадратичной функцией скорости, что также представляется вполне естественным в силу наличия конвективного инерциального члена в уравнениях гидродинамики. Однако здесь простейшая аналогия уже заканчивается. В пористых средах правильное выражение для квадратичного члена дал Форхаймер, а Бринкман учел градиенты вязких деформаций, которые имеют место вблизи границ. В итоге обобщенный закон Дарси принимает вид

$$\rho^f \varphi(k_p) \frac{\partial w_i^f}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\eta^f}{k_p} s_i + \rho^f g_i - \frac{\rho^f b^f}{k} |\vec{s}| s_i + a^f \eta^f \nabla^2 w_i. \quad (8.2.3)$$

Здесь a^f , b^f – коэффициенты вязкого и инерциального сопротивления в поправках Бринкмана и Форхаймера. Во многих случаях эти поправки малы и не учитываются в реальных расчетах.

Экспериментальное исследование плоского течения в пористых средах удобно проводить на физической аналоговой модели Хели-Шоу. В этой модели имеет место стоковское течение вязкой жидкости в тонкой вертикально ориентированной щели. С формальной математической точки зрения уравнения движения в модели Хели-Шоу и уравнения плоского движения пористых сред идентичны. Модель Хели-Шоу легко реализовать в лабораторных условиях. При этом линии тока делаются видимыми с помощью красителей. Это позволяет исследовать тонкие эффекты неустойчивости в пористых средах при сложной геометрии области, когда численные расчеты затруднены.

8.2.2. Тепловая конвекция

Физических причин, заставляющих флюиды совершать достаточно интенсивные многократные движения, не так уж и много. Одной из них является свободная конвекция в пористых средах с твердым недеформируемым скелетом. Здесь имеется в виду конвекция в гетерогенной трещиноватой среде, а не в отдельной поре, которую следует рассматривать как полость. Конвекция возникает тогда, когда во флюиде есть градиент плотности. Он может быть связан с градиентом температуры (тепловая конвекция) или с градиентом плотности (концентрационная конвекция). Наиболее благоприятные условия для тепловой конвекции возникают в самых верхних, наиболее проницаемых слоях коры, в которые попадают расплавы из астеносферы или из вулканов. Вокруг интрузий обычно всегда наблюдается ореол пород, преобразованных гидротермальными водами. Данный механизм достаточно хорошо известен и разработан в геофизической литературе. Многие специалисты вообще отождествляют гидротермальную деятельность с тепловой конвекцией.

Тепловая конвекция в пористых средах является важным фактором рудообразования. Однако она эффективно действует только при больших градиентах температур, которые обычно возникают вблизи магматических интрузий и в срединно-океанических хребтах. Именно в этих регионах обнаруживаются явные геологические и геофизические признаки его присутствия. Кроме того, тепловая конвекция преобразует и переносит горные породы только непосредственно вблизи интрузий. Она дает слишком слабые градиенты порового давления для того, чтобы перемещать массы флюидов на большие расстояния. Поэтому она не может претендовать на роль домини-

рующего механизма миграции флюидов во всей коре. Концентрационная конвекция, несомненно, существует (коль скоро существуют рассолы с разной концентрацией), но она является еще более редкой и экзотической, чем тепловая конвекция.

Начало исследованиям по тепловой конвекции в пористых насыщенных средах положили работы Хортон и Роджерса [Horton, Rogers, 1945], а также Лэпвуда [Lapwood, 1948] и Сорокина [1953], которые рассмотрели проблему устойчивости в этих средах. Они определили минимальное критическое число Рэлея в пористом бесконечном слое с непроницаемыми границами $Ra = 39,5$. Затем эти результаты были обобщены на случай различных граничных условий. Было проведено большое количество лабораторных экспериментов с различными материалами, различающимися структурой матрицы и свойствами насыщающего флюида [Elder, 1965; Combarnous, 1978]. Обзор этих публикаций и систематическое изложение теории тепловой конвекции содержится в работах Нилда [Nield, 1968] и Гершуни и Жуховицкого [1972].

Экспериментальное исследование конвекции Бенара было проведено в работах Моррисона, Роджерса и их коллег [Morrison, 1947; Morrison et al., 1949; Rodgers, Schilberg, 1951; Rodgers et al., 1951]. Изучалось влияние проницаемости и геометрических характеристик области конвекции на критическое число Рэлея. Начало конвекции фиксировалось цветовым индикатором или с помощью радиоактивных меток. Эксперимент дал неожиданный результат. Наблюдаемый при этом критический градиент температуры оказался на порядок меньшим теоретического градиента. Дальнейшие работы этих и других авторов привели к уменьшению разницы между теоретическими и экспериментальными выводами. В экспериментальных исследованиях были учтены различные факторы (начальное условие, температурная зависимость вязкости и т.д.), ранее влиявшие на окончательные выводы.

Главным результатом этих работ и аналогичных вычислительных работ было определение числа Рэлея. В простейшем случае плоскопараллельного слоя с линейным градиентом температуры теория дает для критического числа Рэлея $4\pi^2 \approx 39,5$. Были рассмотрены также другие ситуации с различными граничными условиями и геометрией области конвекции. Была определена зависимость числа Рэлея от числа Нуссельта. Именно число Нуссельта является наблюдаемой величиной, которая прямо или косвенно измеряется в экспериментах. Обычно она связана с конвективным теплопереносом или с массопереносом.

Исторически сложилось так, что фильтрация в пористой среде с жестким скелетом и тепловая конвекция были исследованы наиболее подробно и исчерпывающим образом, что вполне естественно, поскольку эти процессы легко воспроизводимы в лаборатории и наблюдаются в природных условиях. Учет деформаций скелета пористой среды сразу же создает множество проблем. Тип уравнений движения флюида в деформируемой среде зависит от реологии скелета, которая с трудом поддается изучению и во многих случаях неизвестна. Особенно это касается реологических параметров, например, коэффициента вязкости. При заданной реологии матрицы уравнения движения в пористой деформируемой среде на порядок сложнее, чем в среде с жестким скелетом. Механизмы возбуждения движения в такой среде также весьма многообразны. Модели этих механизмов не менее сложны, чем модели самой пористой деформируемой среды. В результате весьма значительные методические трудности исследования таких процессов воспринимаются как принципиальный барьер на пути их изучения.

Произошло некоторое смещение понятий в геологической литературе. Среди специалистов-геологов сложилось мнение о том, что процессы в пористых средах с жестким скелетом являются главными и чуть ли ни единственными возможными во флюидном режиме твердой оболочки Земли. Считается, что геологический процесс, длящийся де-

сятки миллионов лет, можно разбить на маленькие временные интервалы, в течение которых скелет можно рассматривать как жесткий. Суммируя эти процессы, можно (по крайней мере, качественно) описать процессы в деформируемой пористой среде.

Между тем, это глубокое заблуждение. Взаимодействие флюида и скелета не сводится к простому суммированию процессов фильтрации в среде с жестким скелетом и деформирования однофазной среды скелета. Оно представляет собой качественно новое явление, которое не имеет аналогов в однофазных средах. Следовательно, необходимо уметь описывать эти процессы с помощью математических моделей и понимать границы применимости тех или иных моделей пористых сред. В данном разделе приводятся некоторые общие сведения о процессах в деформируемых пористых средах. В следующих разделах будут приведены определяющие уравнения пороупругих и поровязких сред.

8.2.3. Дилатансионный механизм тектонического нагнетания

Дилатансионный процесс нагружения был открыт 150 лет назад Рейнольдсом. Были предложены уравнения дилатансии [Райс, 1982]. В геологической литературе миграция флюидов под влиянием дилатансионного расширения называется *тектоническим нагнетанием* [Файф, 1981].

При достаточно быстром сдвиговом нагружении трещиноватых пороупругих слоев в них возникает дилатансионный эффект. Он сопровождается резким понижением порового давления. В момент землетрясения в его очаге образуются крупные трещины и даже полости. В эти зоны засасываются флюиды. После релаксации сдвиговых напряжений имеет место упругая консолидация трещиноватой зоны под действием веса вышележащих пород. В результате могут возникнуть градиенты порового давления, соизмеримые с геостатическим градиентом.

Важно отметить, что дилатансионное нагружение и консолидация происходят отнюдь не в одинаковых условиях, что связано со многими физическими причинами. Во-первых, напряженное состояние при сдвиге и консолидации пород разное. Само разрушение является необратимым процессом и не повторяет свой путь при разгрузке. Во-вторых, прочностные характеристики среды при осушении и обводнении трещиноватой среды также разные. Поэтому дилатансия и консолидация, действуя совместно, создают направленное движение флюидов в верхней коре, по крайней мере, на локальном уровне. Основная трудность изучения указанного механизма состоит в том, что он не столь очевиден. Он не имеет таких явных доказательств своего присутствия и результатов своего действия, как механизм тепловой конвекции. По указанной причине геологи не в состоянии идентифицировать его по чисто геологическим признакам. Данный режим динамики флюидов никогда не проявляется в чистом виде, понятном для наблюдений. Его наличие обусловлено множеством сопутствующих факторов, таких как геометрия трещиноватой зоны и окружающего массива, ее напряженно-деформированное состояние, динамический режим всей системы и т.д. Он имеет множество разновидностей и вариаций на разных уровнях и при различных условиях, что еще больше запутывает суть дела. Проверить эту флюидодинамическую концепцию достаточно сложно в силу больших пространственных и временных масштабов природных процессов и дороговизны экспериментов. В то же самое время косвенные геологические признаки указанного механизма (даже в рамках целенаправленных наблюдений и экспериментов) не допускают прямой и однозначной интерпретации.

Учитывая сложность этих процессов, их следует рассматривать на основе глубоких теоретических исследований с помощью математических моделей. Однако в настоящее время мы не имеем адекватных уравнений дилатансии и разрушения пористых сред для глубин и масштабов верхней и средней коры. В пользу данного заключения

говорит тот факт, что листрические разломы (их размер, форма и основные закономерности) пока еще не описаны в рамках классической механики разрушения на уровне строгих моделей.

Тем не менее, логика исследования заставляет нас искать не только под фонарем, где светло, но и в темных закоулках. В определенных идеальных условиях указанный механизм может создавать градиент порового давления с фактором $\gamma \approx 1$. Другими словами, градиент порового давления становится соизмеримым с градиентом геостатического давления. В реальных условиях, существующих в разломных зонах, этот фактор на один-два порядка меньше и приближается к его значению в срединно-океанических хребтах.

Расширяться и сжиматься трещиноватая среда может сколь угодно долго, пока действуют благоприятствующие этим колебаниям условия. Данный процесс лишен главного недостатка механизма тепловой конвекции. Он не связан с тепловыми или какими-либо другими источниками и способен перемещать флюиды на большие расстояния. Необходимыми условиями его существования являются лишь наличие разломов, флюидов и тектонических сил в коре.

8.2.4. Компакция

При медленном оседании разжиженных осадочных пород или пород, находящихся в состоянии текучести, в поровязкой среде возникает режим компакций. Он сопровождается фильтрацией флюидов вверх сквозь вязкий скелет. К поровязким средам относятся частично расплавленные горные породы, неконсолидированные морские осадки и илы, зыбучие пески, водонасыщенные глины, болотная жижа и т.д. Многие породы, которые в нормальных условиях являются твердыми (например, консолидированные породы фундамента), за длительные промежутки времени также проявляют вязкие свойства. Точно так же пороупругие в обычных условиях породы за геологические масштабы времени ведут себя как поровязкие. Указанный процесс в молодых осадочных бассейнах называется эллизионным отжатием вод. При компакциях градиент порового давления также порядка геостатического градиента.

В русскоязычной и англоязычной литературе динамика поровязких сред называется соответственно "вязкой консолидацией" и "компакцией". В частности, в российских базах данных широко используется термин вязкая консолидация. Термин компакция не совсем удобен, поскольку в современных базах данных с ним связано слишком много различных понятий. Кроме того, Био уже ввел термин "консолидация", и нет смысла его менять. Ниже будут использоваться оба термина как равноправные. В узком смысле слова под "компакцией" будет подразумеваться сжатие скелета в процессе вязкой консолидации.

Измерить вязкость можно только у достаточно мягких и пластичных пород типа глин и льда. Твердые кристаллические породы проявляют вязкие свойства в течение геологического времени, на много порядков превышающее время жизни человека. Поэтому в лабораторных условиях поставить реологические эксперименты для этих пород невозможно. Их вязкость оценивается косвенным образом с помощью геодинамических моделей или методами физики твердого тела. О вязких деформациях твердых горных пород можно с уверенностью судить, в частности, по наблюдаемой складчатости на обнажениях.

Если из ледника вырезать однотипные куски льда и измерить их вязкость, то окажется, что у разных кусков она будет при одних и тех же термодинамических условиях существенно разная. Это означает, что не существует вязкости как паспортной характеристики вещества. По всей вероятности, подобная ситуация имеет место и в отношении твердых кристаллических горных пород. Все сказанное о вязкости в равной степени относится и к поровязким средам. Не существует также паспортной характеристики

проницаемости горных пород. Тем не менее, вязкие и проницаемые модели горных пород вполне адекватно описывают соответствующие свойства пористых пород в тех случаях, когда нас интересует качественное поведение этих пород.

В геофизической литературе в последнее время появились работы, в которых фигурируют вязкоупругие модели пористых сред. Данное направление еще не вполне сформировалось и наталкивается на определенные трудности. Одна из трудностей связана с оценкой реологических параметров – коэффициентов вязкости и времени вязкоупругой релаксации – из данных наблюдений. При исследовании наблюдаемых процессов в пористых средах с помощью очень грубых и качественных моделей очень трудно отделить вязкоупругие эффекты от эффектов с чисто вязким скелетом. В вязкоупругих моделях среды вязкая и упругая составляющие деформаций должны быть одного порядка, в противном случае происходит вырождение этих моделей. Поскольку упругая составляющая, как правило, невелика, то и общая деформация мала. Поэтому вязкоупругие модели играют чисто вязким и чисто упругим моделям среды, которые имеют ярко выраженные эффекты. Исключение составляют модели трещиноватых сред, в которых пластическая составляющая деформации описывается квазиупругими определяющими соотношениями. Однако эти модели достаточно сложны и требуют известной осторожности, поскольку многие проблемы механики таких сред пока еще недостаточно разработаны. По указанным причинам вязкоупругие модели в данной монографии не рассматриваются.

В континентальной коре практически повсеместно существуют разломы и трещиноватые зоны, а в них действуют тектонические напряжения. От региона к региону и со временем меняется лишь уровень этих напряжений. Когда их действие ослабляется, возникают процессы упругой консолидации в пороупругих массивах горных пород и компакций в поровязкой среде. По масштабам энергии и действующих сил гравитационные и тектонические напряжения являются доминирующим фактором движений в верхней коре. Можно предположить, что связанные именно с этими факторами механизмы дилатансии и компакций являются главной движущей силой флюидодинамических процессов в верхней коре, в частности, причиной образования наблюдаемого распределения рудных месторождений. Именно поэтому им в данной монографии уделяется основное внимание.

8.3. Внутренние границы в гетерогенных средах

В пороупругих и поровязких средах могут происходить процессы, связанные с изменением их микроструктуры. Эти изменения происходят скачкообразно на некоторых внутренних границах и сопровождаются качественным изменением самих определяющих уравнений среды или параметров этих уравнений. Во многом они напоминают фазовые переходы в гомогенной среде. По указанной причине мы будем называть эти превращения *структурно-фазовыми переходами*, в отличие от *истинно фазовых* или просто *фазовых* переходов в гомогенной среде. В данном разделе ставится задача лишь обозначить эту проблему (в основном, применительно к структурно-фазовым переходам) и выделить в ней принципиальные моменты, существенные для постановки задач с внутренними границами.

В поровязких средах изменение микроструктуры может быть связано со скачкообразным изменением проницаемости или с разрушением скелета пористой среды и превращением последней в концентрированную суспензию. В пороупругих средах структурно-фазовые переходы могут быть связаны с изменением трещиноватости среды. Например, до момента полного разрушения может возникнуть некоторое особое состояние, которое отличается большей податливостью, чем гомогенная и однородная упругая сре-

да. В данном состоянии может быть больше трещин, или эти же самые трещины ведут себя по-особому, допуская большие макродеформации среды при тех же самых напряжениях. При этом, если не достигнут порог полного разрушения, среда все еще остается сплошной. Такое состояние будем называть состоянием *предразрушения*. Более строго это состояние будет определено и исследовано ниже в параграфе 10 этой главы.

Общим свойством описанных состояний является наличие внутренней границы, которая может двигаться относительно среды. Такие границы будем называть *структурно-фазовыми*. Возможны также внутренние границы между двумя разными средами, которые мы будем называть *контактными*. Контактные внутренние границы неподвижны относительно среды, но могут двигаться относительно лабораторной системы координат вместе с деформируемым веществом. Внутренние границы могут возникнуть в самой среде без изменения ее свойств, например, в результате разрыва. Разломы и трещины также можно рассматривать как внутренние границы.

Поскольку в краевые задачи входят граничные условия не только на внешних, но и на внутренних границах, то возникает проблема описания условий равновесия и движения на этих границах. С математической точки зрения истинные и структурно-фазовые переходы описываются сходными соотношениями постольку, поскольку они управляются общими законами механики и физики. Различие между ними наступает тогда, когда необходимо учитывать физические процессы на микроуровне.

Исторические сведения по данной проблеме можно почерпнуть в обзоре [Эшелби, 1963]. Существенное продвижение началось с работы [Eshelby, 1951], в которой проводится аналогия между дефектами в кристаллической решетке и классической теорией упругости. Оказалось, что для широкого класса внутренних границ силы, входящие в соотношение баланса сил на этих границах, выражаются через некоторый тензор, который Эшелби называет тензором энергии-импульса. В квантовой теории поля этот термин уже занят. Понятием энергии-импульса обозначается другая величина. Поэтому мы не будем пользоваться этим термином. В последующих работах [Eshelby, 1970, 1975; Hill, 1986] это направление получило дальнейшее развитие. Законченную форму данное направление получило в работе [Мухамедиев, 1990], в которой на основе принципов материально-пространственной симметрии сплошной среды развивается новый подход к описанию квазистатики внутренних границ.

Для того, чтобы объяснить принцип симметрии, введем следующие понятия. Для описания деформаций тела предлагаются две системы координат

$$\vec{x}_\chi = \vec{x}_\chi(x_\chi^1, x_\chi^2, x_\chi^3), \quad \vec{x}_\kappa = \vec{x}_\kappa(x_\kappa^1, x_\kappa^2, x_\kappa^3).$$

Первая из них соответствует конфигурации тела до деформации, а вторая – после деформации. Будем считать, что эти деформации являются достаточно гладкими и не нарушают связности тела. С каждым телом до и после деформации можно связать декартову лабораторную систему координат. Отсюда следует, что из каждой координатной системы можно, преобразуя ее, перейти к декартовой системе координат. С ними можно связать, соответственно, два евклидовых пространства Ω_χ и Ω_κ . Два множества точек этих пространств χ и κ , соответствующих телу и его деформации, называются конфигурациями. Между конфигурациями одного и того же тела есть взаимно однозначное отображение $f_{\kappa,\chi}$ и $f_{\chi,\kappa}$

$$\begin{aligned} f_{\kappa,\chi}: \vec{x}_\kappa &= \vec{f}_{\kappa,\chi}(\vec{x}_\chi), \\ f_{\chi,\kappa}: \vec{x}_\chi &= \vec{f}_{\chi,\kappa}(\vec{x}_\kappa). \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

Множества конфигураций и их отображение (8.3.1) называется состоянием тела B . Условно исходную конфигурацию χ можно назвать пространственной, а деформированную конфигурацию – материальной.

Суть принципа материально-пространственной симметрии состоит в утверждении о том, что обе эти конфигурации в каком-то смысле равноправны. Любой физический закон, изложенный в пространственной конфигурации (т.е. в евклидовом пространстве Ω_χ), может быть перефразирован и имеет аналог в материальной конфигурации (т.е. в евклидовом пространстве Ω_κ). При этом форма его сохраняется, хотя величины, входящие в эти законы, вообще говоря, разные. Стандартным образом выписывается лагранжиан, и с помощью принципа Гамильтона выводятся уравнения эластостатики. В эти уравнения входят тензоры напряжений в различных формах. Выпишем некоторые из этих тензоров в общей форме. Для компактности записи вместо символов и индексов χ и κ , обозначающих принадлежность к той или иной конфигурации, будем использовать греческие буквы α и β , которые обозначают любой из символов χ и κ . Имеем

$$\mathfrak{E}_\beta^\beta = E_\beta \mathfrak{E}_\beta - \frac{\partial E_\beta}{\partial (\nabla_\beta \otimes \bar{x}_\alpha)} (\nabla_\beta \otimes \bar{x}_\alpha)^T. \quad (8.3.2)$$

Здесь E_β – плотность энергии упругих деформаций, ∇_β – градиент, символ прямого (тензорного) произведения, \mathfrak{E}_β – единичный тензор. Крышка сверху означает, что данная величина является тензором, а не компонентой тензора. Подчеркнем, что, хотя величина \mathfrak{E}_β^β есть тензор, индексы при ней не являются тензорными индексами, а по повторяющимся индексам суммирование не производится.

Выражение (8.3.2) дает различные представления тензора напряжений. В частности, \mathfrak{E}_χ^χ есть тензор напряжений Коши, $\mathfrak{E}_\kappa^\kappa$ есть материальный тензор напряжений Эшелби (который иногда называют тензором энергии-импульса).

Для лучшего понимания указанного дуализма системы уравнений эластостатики можно вообразить себе фантастический мир, дуальный нашему. В данном мире конфигурации χ и κ меняются местами. При этом законы эластостатики сохраняют свой смысл, только вместо тензора напряжений Коши в этих соотношениях фигурирует материальный тензор напряжений Эшелби.

Исходя из принципа материально-пространственной симметрии с помощью техники, основанной на вариационных принципах, выводятся соотношения на сильных разрывах, которые могут возникнуть на внутренних границах. В частности, выводятся универсальные условия для различных типов внутренних границ. Универсальность условий и общность подхода основываются на чисто кинематических и балансовых соотношениях, которые соблюдаются в любых ситуациях. Этот подход, основанный лишь на макроуравнениях механики сплошной среды, позволяет с единых позиций рассматривать как истинные фазовые переходы в гомогенных средах, так и структурно-фазовые переходы в гетерогенных средах. При переходе через структурно-фазовую и контактную границы физико-механические свойства среды меняются скачком, что приводит к нетривиальным соотношениям баланса импульса и энергии на этих границах.

В качестве примера в цитированной выше работе Мухамедиева выведены конкретные соотношения для различных частных случаев внутренних границ:

- 1) для структурно-фазовой нежесткой;
- 2) для структурно-фазовой жесткой;
- 3) для контактной нежесткой;
- 4) для контактной жесткой;

5) для границ с проскальзыванием;

6) для границ с прилипанием.

Специфика многих явлений, происходящих на фазовых и структурно-фазовых превращениях, обычно связана с затратой энергии на эти переходы и способом реализации этих энергоемких превращений. Учет физических процессов, происходящих на внутренних границах (в частности, на микроуровне), приводит к дополнительным соотношениям или к видоизменению соотношения баланса энергии.

Для вязких, в частности, гетерогенных тел эти соотношения упрощаются. Если составляющие эту среду фазы несжимаемы, то упругая энергия элементарного объема при структурно-фазовых переходах не меняется. Последнее обстоятельство значительно упрощает балансовые соотношения на внутренних границах, которые по своей форме становятся похожими на граничные условия на контактных границах.

Совсем другая ситуация возникает в упругом массиве, в котором структурно-фазовый переход связан с изменением трещиноватости. При структурно-фазовом переходе в связи с изменением модулей скачком меняется плотность упругой энергии. В данном случае на подвижной относительно среды внутренней границе в соотношении баланса сил вместо тензора напряжений Коши фигурирует материальный тензор Эшелби. Указанный факт приводит к глубоким следствиям, касающимся условий равновесия, устойчивости и продвижения этих границ.

Заметим, что похожие проблемы возникают в механике упругих трещин. Продвижение кончика трещины связано с изменением упругой энергии среды на границе трещины. Концентрация энергии в клюве трещины может достигать огромных значений и приводить к неожиданным наблюдаемым эффектам (кластерам, ионизации и даже к разрушению атомов). Формальное описание продвижения внутренней границы в кончике трещины основывается на технике т.н. J -интеграла Райса-Черепанова.

8.4. Механика пороупругих сред

Об упругих свойствах коры можно судить по распространению сейсмических и акустических волн, а также по данным статических лабораторных экспериментов. О том, что упругие свойства пород сохраняются достаточно длительное время, свидетельствуют ударные выбросы пород в выработках (шахтах и карьерах). Последние представляют собой разрядку упругой энергии. Данный факт дает основание для рассмотрения пороупругой модели среды трещиновато-пористых массивов горных пород.

8.4.1. Исходные уравнения пороупругости

Будем считать, что пористая среда однородна и изотропна, а поры полностью заполнены однофазной сжимаемой жидкостью. Ограничимся изотермическими квазистационарными процессами. При указанных условиях пороупругие среды описываются уравнениями Био:

$$\Omega: \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0, \quad \text{a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1-f)\rho^s] + \operatorname{div} [(1-f)\rho^s \vec{w}^s] = -Q, \quad \text{b)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \rho^f f + \operatorname{div}(\rho^f f \vec{w}^f) &= Q, & \text{c)} \\
\sigma_{ij} &= (1-f) \sigma_{ij}^s - f p \delta_{ij}, \rho = (1-f) \rho^s + f \rho^f, & \text{d)} \quad (8.4.1) \\
\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{ef} - \alpha_e p \delta_{ij}, & \text{e)} \\
\sigma_{ij}^{ef} &= 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), & \text{f)} \\
\frac{\partial p}{\partial x_i} &= -\frac{\eta^f}{k_p} s_i + \rho^f g_i. & \text{g)}
\end{aligned}$$

Здесь σ_{ij} , σ_{ij}^{ef} , σ_{ij}^s – тензоры полных, эффективных и средних напряжений в скелетной фазе, ε_{ij} – тензор деформаций, \vec{u} , \vec{u}^s , \vec{u}^f – смещения двухфазной среды, скелета и флюида, λ, μ – коэффициенты Ламе, Q – плотность массовых источников вещества фаз. Область определения Ω , ограниченная внешней границей Γ_{ex} , может быть конечной или бесконечной и содержать внутренние границы Γ_{int} . Процессы пороупругости протекают в линейном приближении, когда упругие деформации малы, а все материальные характеристики и пористость являются константами. Скорость (и смещение) двухфазной среды отождествляется со скоростью скелета: $\vec{w} \equiv \vec{w}^s$ ($\vec{u} \equiv \vec{u}^s$).

Уравнение (8.4.1a) есть уравнение баланса сил для элементарного объема. Уравнения (8.4.1b,c) представляют баланс массы фаз. Соотношение (8.4.1d) утверждает, что силы и масса фаз являются аддитивными по массе субстанциями. Эти соотношения являются вспомогательными, и в построении макромодели обычно не участвуют. Деформации скелета описываются тензором эффективных напряжений (определяемым соотношением (8.4.1e)), который зависит только от тензора деформаций (8.4.1f). Динамика флюида подчиняется закону Дарси (8.4.1g).

Если флюид двухфазный (например, вода-газ), то некоторые из уравнений (8.4.1), относящиеся к флюиду, соответствующим образом видоизменяются. К ним относятся закон Дарси и балансовые уравнения фаз:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} &= -\delta^{(1)} s_i^{(1)} + \rho^{(1)} g_i, \quad \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i} = -\delta^{(2)} s_i^{(2)} + \rho^{(2)} g_i, & \text{a)} \\
\delta^{(1)} &= \frac{\eta_f^{(1)}}{k_p^{(1)}}, \quad \delta^{(2)} = \frac{\eta_f^{(2)}}{k_p^{(2)}}, & \text{b)} \\
\frac{\partial}{\partial t} \rho^{(1)} f^{(1)} + \operatorname{div} \left[\rho^{(1)} \left(\vec{s}^{(1)} + f^{(1)} \vec{w} \right) \right] &= Q^{(1)}, & \text{c)} \\
\frac{\partial}{\partial t} \rho^{(2)} f^{(2)} + \operatorname{div} \left[\rho^{(2)} \left(\vec{s}^{(2)} + f^{(2)} \vec{w} \right) \right] &= Q^{(2)}. & \text{d)}
\end{aligned} \quad (8.4.2)$$

Здесь $f^{(1)} \equiv f \sigma^{(1)}$, $f^{(2)} \equiv f(1 - \sigma^{(1)})$ – относительные содержания воды и газа, $\sigma^{(1)}$ – водонасыщенность, $k_p^{(i)} \equiv k_p K^{(i)}$, $K^{(i)}$ – абсолютные и относительные фазовые проницаемости, $Q^{(i)}$ – объемные источники фаз, $i = 1, 2$. Здесь верхние индексы 1, 2 обозначают соответственно фазы воды и газа.

Уравнения пороупругости можно разделить на две группы. Одна из них (включающая в себя уравнения (8.4.1a, b, c, d)) описывает балансовые соотношения, которые являются общими для всех гетерогенных сред. Другая группа (которая представляет собой определяющие уравнения) определяет специфику пористых сред с упругим скелетом

(8.4.1e, f, g). Последние уравнения должны быть дополнены уравнениями состояния скелетной и флюидной фаз. Для простоты ограничимся лишь однофазным флюидом

$$\sigma_{kk}^s = -3K^s \frac{\Delta \rho^s}{\rho^s}, \quad p = -K^f \theta = K^f \frac{\Delta \rho^f}{\rho^f}, \quad \Delta \rho^s \equiv \rho^s - \rho_0^s, \quad \Delta \rho^f \equiv \rho^f - \rho_0^f, \quad (8.4.3)$$

где K^s и K^f – объемные модули скелетной и флюидной фаз, символ Δ означает отклонение данной величины от равновесного состояния (т.е. состояния покоя), которое отмечается нижним индексом, $\theta \equiv \text{div} \vec{u}^s = \varepsilon_{kk}$ – объемное сжатие среды.

Уравнения движения пороупругой среды (8.4.1a,b,c,d) можно выразить в смещениях

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad} \theta - \alpha_e \text{grad} p + \rho \vec{g} = 0, \quad \theta \equiv \text{div} \vec{u}^s = \varepsilon_{kk}. \quad (8.4.4)$$

Граничные условия пороупругой задачи также могут быть в напряжениях

$$\Gamma: \quad \sigma_{ij} n_j = 2\mu \varepsilon_{in} + \lambda \theta n_i - \alpha_e p n_i = F_i, \quad p = P, \quad (8.4.5)$$

в смещениях

$$\Gamma: \quad \vec{u} = \vec{U}, \quad s_n = S \quad (8.4.6)$$

или смешанного типа. Здесь F_i , \vec{U} и S – граничные значения соответствующих величин.

Упругие деформации горных пород всегда малы. Если в законе Дарси сохраняется линейная зависимость, то уравнения пороупругости являются линейными. Данное обстоятельство позволяет проводить различные линейные преобразования этих уравнений с целью их упрощения и исследования материальных параметров и частных свойств пороупругих сред.

В работах [Biot, 1962; Райс, 1982; Gassmann, 1956] выведены выражения для некоторых материальных параметров на основе термодинамических принципов. Термодинамический подход гарантирует непротиворечивость полученных выражений общим физическим принципам. Однако он не всегда удобен при различного рода обобщениях, когда вид определяющих соотношений находится, исходя из экспериментальных данных или эвристических соображений. В этой связи более удобными являются рассуждения, опирающиеся на исходные уравнения.

Для того, чтобы получить указанные параметры, проведем некоторые преобразования уравнений (8.4.1), ограничиваясь линейным приближением. Определим безразмерную величину содержания флюида в элементарном единичном объеме ξ следующим соотношением

$$\xi \equiv \frac{1}{\rho^f} (f \rho^f - f_0 \rho_0^f) + f \theta, \quad \dot{\xi} \equiv \frac{d\xi}{dt}.$$

Величина ξ обращается в нуль в равновесном состоянии. Эта величина учитывает не только изменение пористости и плотности флюида, но и изменение самого элементарного объема в процессе деформаций. Заметим, что недренажные условия возникают именно при сохранении ξ , а не пористости, как это может показаться на первый взгляд. Действительно, содержание флюида определяется не только пористостью (т.е. относительным объемом флюида), но и его плотностью.

Упростим уравнение непрерывности твердой фазы

$$\frac{(1-f)}{\rho^s} \frac{\partial \rho^s}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} + (1-f) \text{div} \vec{w}^s = 0.$$

Его можно преобразовать, используя уравнения состояния обеих фаз,

$$\frac{(1-f)}{K^s} \frac{\partial p^s}{\partial t} + \frac{f}{K^f} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\rho^f} \frac{\partial (f \rho^f)}{\partial t} + (1-f) \dot{\theta} = 0.$$

Далее, используя выражения для ξ , это уравнение преобразуется к виду

$$\dot{\xi} = \left[\frac{(\alpha_e - f)}{K^s} + \frac{f}{K^f} \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_e \dot{\theta}.$$

Проинтегрируем его, имея в виду, что величина ξ отсчитывается от равновесного состояния:

$$\xi = \left[\frac{(\alpha_e - f)}{K^s} + \frac{f}{K^f} \right] p + \alpha_e \theta. \quad (8.4.7)$$

Из определения недренажного модуля следует, что при отсутствии дренирования пористая среда нагружается как эффективная однофазная среда

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + K_u \theta \delta_{ij},$$

откуда следует

$$K_u \theta = K \theta - \alpha_e p.$$

Следуя Райсу [1982], введем недренажный модуль K_u , который определяется условиями нагружения элементарного объема при условии его гидроизоляции, т.е. при условии $\xi = 0$:

$$\left[\frac{(\xi - f)}{K^s} + \frac{f}{K^f} \right] p + \alpha_e \theta = 0.$$

Исключая в последних двух уравнениях величину p , получаем

$$\frac{\alpha_e^2}{K_u - K} = \frac{(\xi - f)}{K^s} + \frac{f}{K^f}, \quad K_u - K = \lambda_u - \lambda, \quad K_u = \lambda_u + \frac{2}{3} \mu. \quad (8.4.8)$$

С помощью (8.4.8) можно преобразовать (8.4.7) к виду

$$\xi = \frac{\alpha_e^2 p}{K_u - K} + \alpha_e \theta. \quad (8.4.9)$$

Определим выражение для α_e . Пусть элементарный объем сжимается таким образом, что полный тензор напряжений совпадает с поровым давлением:

$$\frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{1}{3} \sigma_{kk}^s = -p. \quad (8.4.10)$$

Тогда из исходных уравнений (8.4.1с,d) следует

$$p = K \theta + \alpha_e p. \quad (8.4.11)$$

При таком режиме нагружения структура порового пространства меняется, полностью сохраняя свое подобие. В данном частном случае изменение пористости равно нулю, а сжатие скелета совпадает со сжатием двухфазной среды:

$$\sigma_{kk}^s = -3K^s \frac{\Delta \rho^s}{\rho^s} = 3K^s \theta. \text{ Тогда из (8.4.10) следует соотношение}$$

$$\frac{p}{K^{(1)}} + \theta = 0. \quad (8.4.12)$$

Комбинируя (8.4.11) и (8.4.12), получаем

$$\alpha_e = 1 - \frac{K}{K^{(1)}}.$$

Соотношение (8.4.9) позволяет в исходном уравнении движения (8.4.4) исключить поровое давление и ввести величину ξ

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda_u + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \frac{(\lambda_u - \lambda)}{\alpha_e} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \rho g_i = 0. \quad (8.4.13)$$

Выражения (8.4.4) и (8.4.13) можно рассматривать как две эквивалентные альтернативные формы записи уравнений пороупругости.

Взяв дивергенцию от (8.4.4), получаем выражение, связывающее θ и p ,

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \theta - \alpha_e \nabla^2 p = 0. \quad (8.4.14)$$

Уравнение непрерывности жидкой фазы можно представить в форме

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \text{div} \vec{s} = Q. \quad (8.4.15)$$

Комбинируя уравнения (8.4.1е), (8.4.9), (8.4.14), (8.4.15), получаем (следуя Райсу [1982]) известное параболическое уравнение пьезопроводности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa_p \nabla^2 \right) \xi = Q, \quad (8.4.16)$$

где κ_p – коэффициент пьезопроводности, равный

$$\kappa_p = \frac{k_p (K_u - K) \left(K + \frac{4}{3} \mu \right)}{\eta^f \alpha_e^2 \left(K_u + \frac{4}{3} \mu \right)}.$$

В стационарном приближении уравнение пьезопроводности сводится к эллиптическому уравнению

$$-\kappa_p \nabla^2 \xi = Q.$$

Комбинируя последнее уравнение и (8.4.14), получаем для порового давления уравнение Пуассона

$$-\frac{k_p}{\eta^f} \nabla^2 p = Q. \quad (8.4.17)$$

Рассмотрим бесконечную среду без внутренних границ и флюидных источников и примем естественное предположение о том, что все возмущения на бесконечности затухают. Тогда из (8.4.14) следует, что объемное сжатие и поровое давление пропорциональны друг другу

$$\left(K + \frac{4}{3} \mu \right) \theta - \alpha_e p = 0. \quad (8.4.18)$$

Подставляя (8.4.18) в эволюционное уравнение (8.4.16), получаем аналогичное уравнение для порового давления

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa_p \nabla^2 \right) p = \frac{Q (K_u - K) \left(K + \frac{4}{3} \mu \right)}{\alpha_e^2 \left(K_u + \frac{4}{3} \mu \right)}. \quad (8.4.19)$$

Если в пороупругой среде появляются внутренние границы, связанные со скачком упругих модулей, то соотношение (8.4.18) перестает быть верным. Кроме того, на внутренних границах необходимо учитывать условия непрерывности усилий и потока флюида. Эти условия включают в себя тензор напряжений и поровое давление. В дан-

ном случае необходимо решать полную задачу пороупругости для уравнения (8.4.16) с учетом напряженно-деформированного состояния всей среды.

Для двухфазного флюида меняется также и уравнение пьезопроводности. Вместо одного уравнения (8.4.19) имеем два уравнения, описывающие динамику обеих фаз,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (f \rho^{(1)} \sigma^{(1)}) &= \operatorname{div} \left[\frac{k_p K^{(1)} \rho^{(1)}}{\eta^{(1)}} (grad p - \rho^{(1)} \vec{g}) \right] + Q^{(1)}, \quad a) \\ \frac{\partial}{\partial t} [f \rho^{(2)} (1 - s^{(1)})] &= \operatorname{div} \left[\frac{k_p K^{(2)} \rho^{(2)}}{\eta^{(2)}} (grad p - \rho^{(2)} \vec{g}) \right] + Q^{(2)}. \quad b) \end{aligned} \quad (8.4.20)$$

Здесь $\sigma^{(1)}$ – водонасыщенность ($f^{(1)} \equiv f \sigma^{(1)}$), $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$ – относительные фазовые проницаемости по воде и газу ($k_p^{(i)} \equiv k_p K^{(i)}$), $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ – объемные источники воды и газа. Указанные уравнения дополняются уравнением состояния для флюидных фаз и законом Дарси для них.

Рассмотрим разлом, в котором нет относительных смещений границ и других внешних воздействий, а все возмущения определяются динамикой пороупругой среды разлома. В данном случае в пористой среде разлома область определения является одномерной (или двумерной) бесконечной криволинейной поверхностью без внутренних границ. Для нее применимо уравнение (8.4.16) с соответствующим числом измерений [Теркот и Шуберт, 1985]. Например, в случае одного измерения имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa_p \frac{\partial^2 \xi}{\partial l^2} \right) = Q. \quad (8.4.21)$$

Здесь l – длина разлома, отсчитываемая от некоторой произвольной точки. Согласно работе [Райс, 1982] среда разлома является сильно проницаемой. Величина κ_p лежит в интервале от 0,1 до 1 м²/сек.

8.4.2. Особые условия пороупругих задач и проблемы численной реализации

Уравнения пороупругости достаточно сложны как для численных, так и для аналитических методов исследования. Поэтому используются различного рода упрощения и преобразования исходных уравнений, которые позволяют получить следующие тактические преимущества. Часто бывает важно понять суть физических процессов на примере простых моделей. В этом случае, используя специфику модели и особенности данного преобразования, можно предельно упростить задачу и сделать ее доступной для исследования аналитическими средствами. В частности, можно получить простейшие аналитические решения, которые будут служить тестами для численных методов. Указанные преобразования дают возможность также упростить алгоритм численных решений.

Наиболее популярный прием, используемый при исследовании пороупругих моделей, основан на аналогии между уравнениями пороупругости и термоупругости [Болл, Уэйнер, 1964]. Действительно, с точностью до переобозначений эти уравнения практически ничем не отличаются [Керчман, 1976; Norris, 1992]. Теория термоупругости является достаточно продвинутой в связи с требованиями современной техники, особенно, в области машиностроения, ракетной техники и т.д. Очень соблазнительной является идея перенести эти методы на подземную гидродинамику.

Однако в действительности данное сходство уравнений является обманчивым, а ожидания – призрачными. Оговорка "практически" не является случайной. Наиболее

интересные модели пороупругих процессов в верхней коре основаны на тех или иных обобщениях классических уравнений Био. Действительно, практически все представляющие прикладной интерес модели пороупругости содержат некие особые условия, которые существенно усложняют постановку идеализированной задачи, описанной в предыдущем подразделе. Эти особые условия включают в себя внутренние границы (контактные и фазовые), сложную конфигурацию области с сингулярными границами (т.е. границами, содержащими угловые точки и точки возврата) и различные виды нелинейности. Не следует забывать также масштабный фактор и экстремальные условия.

При больших нагрузках (например, при закачке жидкости или газа в скважины или в очаг землетрясений) в процессе фильтрации происходит микроразрушение среды при сохранении ее сплошности. Оно сопровождается изменением проницаемости и упругих модулей. Кроме того, как показано выше, сама фильтрация происходит в нелинейном режиме в силу инерциальных эффектов. Соответствующие этим явлениям видоизменения закона Дарси рассмотрены во втором параграфе данной главы. При этом естественно меняется и уравнение пьезопроводности. Некоторые нелинейные эффекты сводятся к различным нелинейным вариантам уравнения пьезопроводности типа (8.4.16) для порового давления (см. например, обзор [Баренблатт, 1987]). Если определяющие уравнения (будь то реологическое уравнение или закон фильтрации) содержат падающие участки кривой нагружения, то в процессе эволюции пороупругой системы могут возникнуть автоколебания.

При любых обобщениях исходных уравнений указанная аналогия начинает "хромать". В этих ситуациях могут меняться определяющие уравнения, и тогда сама постановка задачи выходит за рамки проблемы пороупругости. Однако и в классической постановке исходных уравнений в форме (8.4.1) аналогия с термоупругостью не является полной из-за различий в граничных условиях. Граничные условия для пороупругих моделей в типичных геологических ситуациях качественно отличаются от граничных условий, используемых в инженерно-технических областях. Например, в области подземной гидродинамики трудно подыскать какую-нибудь аналогию термоупругим оболочкам, которым посвящена львиная доля работ по термоупругости.

Тем не менее, аналогия с термоупругостью может оказаться полезной, коль скоро не затрагиваются граничные условия и различные специальные условия, требующие обобщения исходной модели. В частности, она имеет смысл при качественном исследовании общих уравнений, при создании простейших тестовых аналитических решений и т.п.

При исследовании конкретных задач геопользования в моделях пороупругости обычно используют численные методы. Аналитическому решению поддается только узкий класс задач, в основном, линейных и в идеализированной постановке. Аналитические решения и численные решения в идеализированной постановке обычно используются для качественных исследований физических процессов и тестовых примеров для программ численного расчета.

Пример нетривиальной аналитической пороупругой модели в разломе сложной формы с учетом критерия разрушения приведен в работе [Galybin et al., 1998]. Численное решение несвязанной пороупругой задачи было использовано для изучения техногенной сейсмичности [Колдоба и др. 1999]. Связанная линейная задача пороупругости с учетом возможности пластического разрушения при достижении пластического предела была исследована численными методами в работе [Stone, Bowen, 2000].

Общую программу численных расчетов пороупругих процессов создать практически невозможно вследствие многообразия осложняющих факторов и физических явлений в этих средах. Процесс создания каждой конкретной программы от исходных физических идей до конечного продукта занимает достаточно большое время. Быстрое продвижение по технологической цепочке возможно только за счет упрощенных моде-

лей. Глубокая и длительная проработка обесценивается, если результат не подан вовремя. По указанной причине представляется разумным создание программных модулей, из которых можно создавать более сложные программы.

Разбиение сложных программ на отдельные простые блоки (модули) может основываться на разных принципах и идти разными путями. Один из них предполагает преобразование исходных уравнений пороупругости так, чтобы связанная задача пороупругости приобрела некоторые формальные признаки несвязанных задач упругости и пьезопроводности. Заметим, что, строго говоря, связанную задачу невозможно преобразовать к двум несвязанным (которые можно решать порознь, независимо друг от друга). Однако в действительности полной несвязанности и не требуется. Достаточно будет, если указанные задачи решаются в определенной последовательности. При этом каждое последующее решение использует результаты предыдущего решения. Эта идея лежит в основе *принципа неполной связанности*. Для реализации принципа неполной связанности необходимо иметь набор преобразований исходных уравнений пороупругости к различным формам, допускающим использование данного принципа. Эти преобразования приводятся в следующем параграфе.

Заметим, что приведенные преобразования касаются только линейных уравнений пороупругости в идеализированной постановке. Программа численного решения этих уравнений (solver) уже создана в несвязанном варианте [Stone, Bowen, 2000]. Однако принцип неполной связанности имеет более глубокое содержание, чем то, которое очерчено в идеализированной постановке. Его можно применять для нелинейных задач с неустойчивыми решениями, в задачах со сложными внутренними границами и многофазным флюидом, а также в задачах компакций. Приведенная формулировка указанного принципа носит методический характер и преследует цель раскрыть возможности этого подхода.

8.5. Преобразование уравнений пороупругости с однофазным флюидом

В связи со сказанным представляется целесообразным исследование различных форм и представлений уравнений пороупругости. Смысл приводимых преобразований сводится к тому, чтобы, по крайней мере, формально отделить переменную во времени составляющую решения от постоянной составляющей, зависящей от граничных условий. Другими словами, связанной задаче придать формальный вид несвязанной задачи. Напомним, что никакие преобразования не могут изменить тип уравнений. Однако при упрощениях тип уравнений меняется, и здесь форма представления играет существенную роль.

8.5.1. Преобразование 1

Следуя Био [Biot, 1956a,b; 1962], произведем разложение смещения на две составляющие такие, что одна из них является потенциальной, а другая соответствует смещениям при отсутствии фильтрации

$$\vec{u} = \vec{u}^{(0)} + \vec{u}^{(1)}, \quad p = p^{(0)} + p^{(1)}, \quad \vec{u}^{(1)} = \text{grad} \Phi^{(1)}, \quad \theta^{(1)} = \nabla^2 \Phi^{(1)},$$

где $\Phi^{(1)}$ – скалярный потенциал смещения.

Подставляя это разложение в уравнение движения в форме (8.4.13) с учетом их свойств, получаем

$$\mu \nabla^2 u_i^{(0)} + (\lambda_u + \mu) \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial x_i} + \rho g_i = 0, \quad \xi^{(0)} = \frac{\alpha_e^2 p^{(0)}}{K_u - K} + \alpha_e \theta^{(0)} = 0, \quad \text{a)}$$

(8.5.1)

$$(\lambda_u + 2\mu) \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x_i} - \frac{(K_u - K)}{\alpha_e} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial x_i} = 0, \quad \xi^{(1)} = \xi = \frac{\alpha_e^2 p^{(1)}}{K_u - K} + \alpha_e \theta^{(1)}. \quad \text{b)}$$

Преобразуем оба уравнения (8.5.1). Применим к уравнению (8.5.1a) операцию дивергенции и проинтегрируем уравнение (8.5.1b). Не ограничивая общности, можно константу интегрирования в последнем уравнении положить равной нулю. Комбинируя эти выражения, можно получить парные соотношения между величинами $\theta^{(1)}$, $\xi^{(1)}$ и $p^{(1)}$:

$$\nabla^2 p^{(0)} = \nabla^2 \theta^{(0)} = 0, \quad \theta^{(0)} = -\frac{\alpha_e p^{(0)}}{K_u - K}, \quad \text{a)}$$

$$\left(K_u + \frac{4}{3} \mu \right) \theta^{(1)} - \frac{(K_u - K)}{\alpha_e} \xi^{(1)} = 0, \quad \text{b)} \quad (8.5.2)$$

$$\xi^{(1)} = \alpha_e^2 \left[\frac{1}{K + \frac{4}{3} \mu} + \frac{1}{(K_u - K)} \right] p^{(1)}, \quad \alpha_e p^{(1)} = \left(K + \frac{4}{3} \mu \right) \theta^{(1)}. \quad \text{c)}$$

Для потенциальной составляющей величины $\xi^{(1)}$ и $p^{(1)}$ уже не являются независимыми. Выпишем также выражение для тензора полных напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(0)}, \quad \sigma_{ij}^{(0)} = 2\mu \varepsilon_{ij}^{(0)} + \lambda_u \theta^{(0)} \delta_{ij}, \quad \sigma_{ij}^{(1)} = 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} - \theta^{(1)} \delta_{ij} \right). \quad (8.5.3)$$

Смысл данного преобразования состоит в том, что потенциальная составляющая смещения $\vec{u}^{(1)}$ полностью включает в себя все эффекты фильтрации, а вторая составляющая – только уравнения теории упругости без фильтрации. Оно удобно в краевых задачах с внешними граничными условиями для массива и с флюидными источниками, поскольку позволяет для внешних граничных условий сформулировать задачи классической теории упругости. В то же самое время пороупругие задачи решаются с нулевыми граничными условиями.

Для внутренних граничных условий на трещинах ситуация несколько сложнее, поскольку смещения на этих границах определяются в процессе решения. Заметим, что уравнения (8.4.13) и (8.5.2a) связаны друг с другом и не зависят от уравнения (8.5.2b) ни напрямую, ни через граничные условия, если граничные условия для фильтрационной составляющей выражены через давление или градиент давления. Они образуют эволюционную группу уравнений. Напряженное состояние массива вычисляется с помощью уравнений теории упругости (8.5.2b), в граничные условия которых (условия в напряжениях) входит поровое давление. Таким образом, осуществляется связь между фильтрационной и упругой составляющими. Данный факт является основой для классической теории пьезопроводности, в которой игнорируется напряженное состояние массива, описываемое уравнениями пороупругости.

Однако для нелинейных задач и в случае, если на границе имеют место смешанные граничные условия, решать задачу пьезопроводности без полных уравнений пороупругости невозможно. Смешанные условия могут возникнуть, например, если скорость фильтрации на границе зависит от напряженного состояния на указанной границе. Преобразование теряет свой смысл также, если сами пороупругие возмущения возбуждаются напряжениями или смещениями на внутренних границах.

В оригинальных работах Био [1956a, b] делается следующий шаг. Уравнение классической теории упругости (8.5.1a) преобразуется методом Папковича-Нейбера.

Смысл этого преобразования состоит в том, что бигармоническая функция, представляющая решение этого уравнения, сводится к комбинации двух гармонических функций. Гармонические функции удобнее при качественных исследованиях, поскольку их свойства хорошо изучены. В работах [McNamee, Gibson, 1960] и В.И. Керчмана [1976] приведены примеры аналитических решений, иллюстрирующих полезность указанных преобразований.

8.5.2. Преобразование 2

Можно произвести разложение смещения на две такие составляющие, что одна из них является потенциальной, а другая – соленоидальной,

$$\vec{u} = \vec{u}^{sol} + \vec{u}^{(2)}, \quad \text{div} \vec{u}^{sol} = 0, \quad \vec{u}^{(2)} = \text{grad} \Phi^{(2)}, \quad \nabla^2 \Phi^{(2)} = \theta. \quad (8.5.4)$$

Введем новые величины Π и σ_{ij}^{sol} соотношениями

$$\Pi \equiv -(\lambda_u + 2\mu)\theta + \frac{(\lambda_u - \lambda)}{\alpha_e} \xi = -(\lambda + 2\mu)\theta + \alpha_e p, \quad \text{a)}$$

$$\sigma_{ij}^{sol} \equiv \tau_{ij}^{sol} - \Pi \delta_{ij}, \quad \tau_{ij}^{sol} \equiv \mu \left(\frac{\partial u_i^{sol}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{sol}}{\partial x_i} \right). \quad \text{b)} \quad (8.5.5)$$

Подставляя разложение (8.5.4) в уравнение (8.4.11), приходим к уравнению

$$\mu \nabla^2 u_i^{sol} - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \rho g_i = 0, \quad \text{div} \vec{u}^{sol} = 0, \quad \text{a)}$$

$$\nabla^2 \Pi = 0. \quad \text{b)} \quad (8.5.6)$$

Тензор полных напряжений и граничное условие в напряжениях в данном представлении принимают вид

$$\Gamma_{ex} : \sigma_{ij} = \tau_{ij}^{sol} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial x_i \partial x_j} - \alpha_e \theta \delta_{ij} \right) - \Pi \delta_{ij}, \quad (8.5.7)$$

$$\Gamma_{ex} : \sigma_{ij} n_j = \left(\tau_{ij}^{sol} + 2\mu \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial x_i \partial x_j} \right) n_j - (\Pi + 2\mu \theta) n_i = F_i. \quad (8.5.8)$$

Выражения (8.5.6) совместно с (8.5.5b) представляют собой уравнения теории упругости некоторой фиктивной несжимаемой среды. Величина Π в новом представлении играет роль давления. При преобразовании (8.5.1) потенциальная составляющая $\vec{u}^{(2)}$ включает в себя не только эффекты фильтрации, но и упругое объемное сжатие скелета.

Для граничных условий в смещениях или при смешанных граничных условиях данное представление, на первый взгляд, не совсем приемлемо. Тем не менее, оно оказывается удобным при решении задач о трещинах (со смешанными граничными условиями) в бесконечном пространстве. Соленоидальную (вихревую) составляющую можно полностью связать со смещениями по границам трещин.

Преобразование второго типа удобно в тех случаях, когда соленоидальная составляющая смещения вычисляется достаточно просто. Например, в силу особых свойств задачи она может быть равной нулю.

8.5.3. Преобразование 3

Уравнения пороупругости можно записать также в третьей эквивалентной форме

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda^* + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \alpha_e \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \rho g_i = 0, \quad \lambda^* \equiv -2\mu, \quad K^* = -\frac{4}{3}\mu. \quad (8.5.9)$$

Тензор упругих напряжений и граничное условие в напряжениях принимают вид

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda^* \theta \delta_{ij} - \alpha_e \Pi \delta_{ij}, \quad (8.5.10)$$

$$\Gamma_{ex}: \sigma_{ij} n_j = 2\mu \varepsilon_{in} + \lambda^* \theta n_i - \alpha_e \Pi n_{ii} = F_i. \quad (8.5.11)$$

Выпишем также граничное условие в смещениях

$$\Gamma_{ex}: \vec{u} = \vec{U}, \quad s_n = S. \quad (8.5.12)$$

Формально уравнения (8.5.9), (8.5.10) также представляют собой уравнения пороупругости с исходным тензором деформаций, только с другими материальными константами. Объемный модуль упругости стал отрицательным, а сдвиговый модуль остался без изменения. Ни к каким реальным физическим последствиям отрицательный объемный модуль упругости не приводит, поскольку мы не выходим за пределы тождественных преобразований исходных уравнений пороупругости. В данном представлении можно использовать любые граничные условия: условия в напряжениях, в смещениях или смешанные граничные условия. Его преимущество перед исходным представлением состоит в том, что "поровое давление" Π удовлетворяет простому уравнению Лапласа.

Каждое из трех преобразований имеет свои особенности, которые проявляют себя как некоторые преимущества в каждом конкретном случае. В общем виде эти преимущества можно сформулировать в виде т.н. "принципа неполной связанности". Согласно указанному принципу система уравнений пороупругости имеет определенную иерархическую структуру, состоящую из отдельных блоков. Высшее место в этой иерархии занимают блоки, которые можно решать независимо от других блоков уравнений. Последнее место занимают те уравнения, которые зависят непосредственно или через граничные условия от всех предыдущих блоков уравнений.

Отдельные блоки, можно "расщепить", следуя тому же самому принципу неполной связанности. В частности, в системе уравнений (8.4.16) и (8.5.2а) можно сначала совершенно независимо решать уравнение пьезопроводности (8.4.16), а только потом уже уравнение Лапласа (8.5.2а). Выбор иерархической структуры полностью определяется конкретикой задачи и методами решений. Численные и аналитические задачи имеют принципиально разную логику решения. При аналитическом подходе сначала решаются простые примеры, которые позволяют понять физическую суть процессов. Потом производится обобщение на более сложные случаи. При численных расчетах целесообразно с самого начала получить наиболее общий алгоритм решения, а затем с его помощью уже решать частные задачи. Принцип неполной связанности позволяет в какой-то степени разрешить указанное противоречие. Можно создать блоки решения частных задач и затем, как в детском конструкторе, комбинировать из них более сложные задачи. Предусмотреть все мыслимые и немыслимые варианты иерархической структуры достаточно сложно. Однако не составляет труда создать заранее алгоритмы решения отдельных частных задач. Отметим, что принцип неполной связанности не является универсальным и имеет свою область применимости.

8.6. Плоские задачи пороупругости

Плоские задачи пороупругости можно записать в комплексном виде, что позволяет использовать аппарат функций комплексных переменных. В стационарном случае существует аналогия с плоской стационарной теорией термоупругости [Norris, 1992],

которая позволяет сразу воспроизвести комплексное представление, поскольку для термоупругости оно уже известно [Мусхелишвили, 1966].

8.6.1. Стационарные задачи

В плоском приближении задачи пороупругости упрощаются. В исходных уравнениях (8.4.1) положим равными нулю силу тяжести и массовые источники. Перепишем эту систему с помощью комплексных потенциалов

$$\sigma_{xx}^{(1)} + \sigma_{yy}^{(1)} = 2(\varphi' + \bar{\varphi}'), \quad \text{a)} \quad (8.6.1)$$

$$\sigma_{yy}^{(1)} - \sigma_{xx}^{(1)} + 2i\sigma_{xy}^{(1)} = 2\left\{\overline{(z - z_0)}\varphi'' + \psi'\right\}, \quad \text{b)}$$

$$F \equiv X + iY = -\left\{\varphi + (z - z_0)\bar{\varphi}' + \bar{\psi}\right\}\Big|_{z_2}^{z_1}, \quad \text{a)} \quad (8.6.2)$$

$$2\mu(u_x^f + iu_y^f) = \left\{x\varphi - (z - z_0)\bar{\varphi}' - \bar{\psi}\right\}, \quad \kappa_e = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}. \quad \text{b)}$$

Здесь $z \equiv x_1 + ix_2$, $X = X_1 + iX_2$ – комплексный вектор усилий, приложенных к линии, соединяющей точки z_1 и z_2 , со стороны положительной нормали, т.е. с правой стороны при движении от z_1 к z_2 ; $\left\{\dots\right\}\Big|_{z_1}^{z_2}$ – разность выражения в скобке, взятого в точках z_1 и z_2 . Выражения (8.6.1), (8.6.2а) для напряжений и усилий совпадают с соответствующими выражениями для однофазной упругой среды, которые описываются формулами Колосова-Мусхелишвили с помощью потенциалов φ и ψ . В выражение для смещений (8.6.2б) входит еще один дополнительный потенциал ω , связанный с фильтрационными величинами соотношениями

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} = -\frac{\delta n(\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)}w, \quad \text{a)} \quad (8.6.3)$$

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{n(\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)}P, \quad \text{b)}$$

где $w \equiv s_1 - is_2$, $P \equiv p + iq$ – комплексные скорость фильтрации и давление, которые связаны между собой законом Дарси в комплексной форме

$$\frac{dP}{dz} = -\delta w. \quad (8.6.4)$$

Величина q имеет следующий смысл. Разность значений ее в двух точках дает величину потока через линию, соединяющую эти точки.

Согласно работе [Мусхелишвили, 1966] можно ввести некоторую фиктивную однофазную упругую среду, которая описывается формулами Колосова-Мусхелишвили с потенциалами φ и ψ . Для этих потенциалов формулируется вспомогательная краевая задача. Напряженные состояния истинной (двухфазной) и фиктивной (однофазной) сред, даваемые выражениями (8.6.1), совпадают, а смещение фиктивной среды u_i^f дается выражением

$$2\mu(u_x^f + iu_y^f) = \left\{x\varphi - (z - z_0)\bar{\varphi}' - \bar{\psi}\right\}. \quad (8.6.5)$$

Выражения (8.6.1) и (8.6.5) не содержат никакой информации о флюидном режиме, т.е. о поровом давлении и фильтрационных потоках. Эту информацию содержат граничные условия на внешних и внутренних границах.

Заметим, что потенциалы φ , ψ и ω определены неоднозначно и допускают преобразования, оставляющие физические величины (например, напряжения согласно (8.5.13)) инвариантными,

$$\varphi \rightarrow \varphi + \gamma + izC, \quad \psi \rightarrow \psi + \gamma', \quad \omega \rightarrow \omega + \gamma_0,$$

где $\gamma, \gamma', \gamma_0$ – произвольные комплексные, а C – действительная константа. Смысл данного преобразования исследован в работе [Мухелишвили, 1966]. Заметим, что произволом можно воспользоваться для того, чтобы выполнялось условие однородности в начале координат (или некоторое аналогичное ему условие)

$$\varphi = 0, \psi = 0, \omega = 0 \quad \text{при } z = z_1. \quad (8.6.6)$$

8.6.2. Комплексное представление плоских нестационарных задач

Как и в предыдущем случае, исключим силу тяжести, и в аналогичных переменных будем описывать плоскую задачу [Rice, Cleary, 1976]. Воспользуемся преобразованием 1 уравнений пороупругости в форме (8.5.1). Составляющая (0) соответствует классической теории упругости и может быть представлена с помощью комплексных потенциалов $\varphi(z)$, $\psi(z)$, аналогично (8.6.1):

$$\sigma_{xx}^{(1)} + \sigma_{yy}^{(1)} = 2(\varphi' + \bar{\varphi}'), \quad \text{a)} \quad (8.6.7)$$

$$\sigma_{yy}^{(1)} - \sigma_{xx}^{(1)} + 2i\sigma_{xy}^{(1)} = 2\left\{\overline{(z - z_0)}\varphi'' + \psi'\right\}. \quad \text{b)}$$

Составляющая $\xi^{(1)} = \xi$ не является гармонической функцией и зависит от времени. В силу представления (8.5.3) и соотношений (8.6.7) полный тензор напряжений также может быть представлен в комплексной форме

$$\sigma_{xx}^{(1)} + \sigma_{yy}^{(1)} = 2(\varphi' + \bar{\varphi}'), \quad \text{a)} \quad (8.6.8)$$

$$\sigma_{yy}^{(1)} - \sigma_{xx}^{(1)} + 2i\sigma_{xy}^{(1)} = 2\left\{\overline{(z - z_0)}\varphi'' + \psi'\right\}. \quad \text{b)}$$

Эти соотношения можно представить в несколько другой форме, если величину ξ выразить как функцию двух сопряженных переменных z и \bar{z} : $\xi(z, \bar{z})$, а соотношение баланса сил

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad (8.6.9)$$

представить в комплексной форме. Положим

$$\sigma \equiv \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2}, \quad \tau \equiv \frac{(\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})}{2}. \quad (8.6.10)$$

Тогда уравнение (8.6.9) принимает вид (см. (7.2.6))

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial \bar{z}}. \quad (8.6.11)$$

Подставим в (8.6.11) выражение для σ согласно (8.6.8a) и после этого с помощью соответствующей квадратуры произведем расчет величины τ :

$$\sigma_{yy}^{(1)} - \sigma_{xx}^{(1)} + 2i\sigma_{xy}^{(1)} = 2\left\{\overline{(z - z_0)}\varphi'' + \psi'\right\}. \quad (8.6.12)$$

Величина ψ' здесь появляется как произвольная функция интегрирования. Ее значение определяется из сопоставления с выражением (8.6.8b). Сопоставляя (8.6.12) и (8.6.8b), получаем соотношение

$$2\mu\left(\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial x_2^2}\right)+4i\mu\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial x_1\partial x_2}=-\frac{2\mu(\lambda_u-\lambda)}{\alpha_e(\lambda_u+2\mu)}\int\frac{\partial\xi(z,\bar{z})}{\partial z}d\bar{z}. \quad (8.6.13)$$

Приведем также выражение для главного вектора сил X , действующего на некоторый контур. Удобно рассмотреть комплексно сопряженный вектор

$$\bar{X}=i\int_{z_1}^{z_2}(\sigma d\bar{z}+\tau dz).$$

Подставляя сюда выражения для σ и τ согласно (8.6.10) и (8.6.12), получаем

$$\bar{X}=\bar{X}^{(0)}-i\frac{\mu(\lambda_u-\lambda)}{\alpha_e(\lambda_u+2\mu)}\int\frac{\partial\xi(z,\bar{z})}{\partial z}d\bar{z}. \quad (8.6.14)$$

Величина ξ может быть получена с помощью решения параболического уравнения (8.4.16).

8.7. Уравнения компакции поровязкой среды

8.7.1. Общие уравнения

Динамика поровязких сред описывается уравнениями компакции. Рассматривается приближение уравнений компакции для медленных ("ползущих") движений, аналогичное приближению Стокса уравнений классической гидродинамики. Другими словами, в уравнениях движения и в граничных условиях отбрасываются инерциальные члены. Уравнения компакции (как и уравнения пороупругости) делятся на две группы. К первой группе относятся балансовые соотношения для импульса, массы и энергии, справедливые для всех двухфазных гетерогенных сред,

$$\begin{aligned}
 \Omega_c: \quad & \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0, & \text{a)} \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \rho^f f + \operatorname{div}(\rho^f f \vec{w}^f) = Q, & \text{b)} \\
 & \frac{\partial}{\partial t} [(1-f)\rho^s] + \operatorname{div}[(1-f)\rho^s \vec{w}^s] = -Q, & \text{c)} \\
 & \sigma_{ij} = (1-f)\sigma_{ij}^s - fp\delta_{ij}, & \text{d)} \\
 & \rho c \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{w}^s \nabla) T \right] + \rho^f c^f (\vec{s} \nabla) T = \lambda_T \nabla^2 T - Ql + q. & \text{e)}
 \end{aligned} \tag{8.7.1}$$

Здесь T – температура, λ_T – коэффициент теплопроводности, l – скрытая теплота плавления, q_T – плотность объемных источников тепла, c – теплоемкость смеси, которая определяется из соотношения $\rho c = \rho^f c^f + \rho^s c^s$, где c^f , c^s – удельные теплоемкости фаз. Эти уравнения справедливы в области компакции Ω_c , которая ограничена внешней границей Γ_{ex} . Область определения может быть конечной или бесконечной. В частности, она может занимать все трехмерное пространство.

Ко второй группе относятся специальные соотношения (определяющие уравнения), связанные со свойствами и микроструктурой среды и физическими процессами в ней самой и на ее границах. Двухфазная гетерогенная среда становится пористой средой, когда в ней возникает скелет, сквозь который фильтруется флюид. С математической точки зрения это означает, что в тензоре напряжений выделяются поровое давление и тензор эффективных (по Нуру) напряжений σ_{ij}^{ef} , который зависит от тензора скорости деформаций,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ef} - p\delta_{ij}. \tag{8.7.2}$$

Для эффективных напряжений выполняется линейный реологический закон, а для флюидной фазы принимается закон Дарси

$$\sigma_{ij}^{ef} = \eta \left(\frac{\partial w_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j^s}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k^s}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \zeta \frac{\partial w_k^s}{\partial x_k} \delta_{ij}, \tag{8.7.3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{\eta^f}{k_p} s_i + \rho^f g_i. \tag{8.7.4}$$

Здесь ζ и η – коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости. Введем для удобства коэффициент гидравлического сопротивления $\delta_p = \frac{\eta^f}{k_p}$. Величины ζ , η и δ_p в общем случае являются функциями пористости и инвариантов тензоров напряжений и скорости де-

формаций. В случае линейной реологии фаз эти величины зависят только от пористости. В данной работе для них примем зависимость в виде обратных степенных функций пористости, а также будем считать, что сдвиговая вязкость η от пористости не зависит. Имеем

$$\zeta + \frac{4}{3}\eta = \frac{A_l}{f^l}, \quad \delta_p = \frac{B_k}{f^k}, \quad \eta = Const, \quad (8.7.5)$$

где A_l и B_k – некоторые материальные константы. Общие уравнения дополняются краевыми условиями. К ним относится начальное условие

$$f = F(\vec{x}) + f_{\min} \quad \text{при } t = 0, \quad (8.7.6)$$

а также граничные условия на внутренних и внешних границах. Например, внешняя граница может быть жесткой и непроницаемой

$$\Gamma_{ex}: s_n = 0, \quad w_n^s = 0. \quad (8.7.7)$$

Здесь $s_n \equiv s_i n_i$, \vec{n} – вектор единичной нормали.

Поровязкие среды существенно нелинейны. Кроме того, они отличаются особым типом неустойчивости. С физической точки зрения данный тип неустойчивости можно охарактеризовать как стремление двухфазной поровязкой среды разделиться на отдельные фазы. В этой связи в двухфазной смеси возникают внутренне структурно-фазовые границы. Этот класс краевых задач компактизации был предложен в работах [Каракин, Лобковский, 1979; Karakin, Lobkovskii, 1979; Каракин, 1990b, 1999; Каракин и др., 2001]. Как было показано выше, превращения на этих границах во многом аналогичны фазовым переходам в гомогенной среде. В отличие от пороупругих сред для поровязких сред соотношение баланса энергии на структурно-фазовых границах выглядит значительно проще, поскольку упругая энергия вязких сред зависит только от объемного сжатия. Это приводит к соответствующему упрощению граничных условий на этих границах.

Есть два типа внутренних структурно-фазовых границ. На границах типа А общающиеся поры становятся изолированными (или же наоборот изолированные поры становятся открытыми) при некотором минимальном значении пористости, а фильтрация прекращается. Численное решение краевых задач с границами подобного типа содержится в работах [Каракин, Левитан, 1993; Каракин и др., 2001]. На границах типа В происходит разрушение скелета и образование концентрированной суспензии или кластерных структур. Этот тип границ был исследован в работе [Каракин, 1999], в которой были предложены некоторые граничные условия, зависящие от физических процессов на этих границах. В данной монографии рассматриваются только границы первого типа.

Структурно-фазовые переходы составляют неотъемлемую часть постановки задач вязкой консолидации. Это утверждение может быть изложено на языке математики. Класс задач без внутренних границ не является полным. Он всегда может быть дополнен задачами с внутренними границами без изменения определяющих уравнений (т.е. физической сути задачи). При этом задачи с указанными границами и без них существенно различаются. Другими словами, наличие этих границ при определенных условиях меняет математическую (и физическую) природу задачи. Формально это выглядит как вырождение исходных уравнений.

В силу сказанного механика поровязких сред значительно сложнее механики пороупругих сред. По этой причине целесообразно произвести различного рода упрощения и преобразования. В некоторые граничные условия поровое давление и общее давление входят за вычетом гидростатической составляющей. Ее разумно вычесть. Положим

$$p = p^a + p^G, \quad \text{grad} p^G \equiv -\rho \vec{g}.$$

Здесь p^a – т.н. пьезометрическая (или гидродинамическая) составляющая давления, т.е. отклонение порового давления от гидростатического уровня давления p^G в поровязкой среде. Уравнения, включающие в себя величину p^a , выглядят несколько проще исходных уравнений.

8.7.2. Внутренние границы типа А

Внутренние границы отделяют внутреннюю область (собственно компакцию Ω_c) от двухфазных внешних областей Ω_v . Во внешних областях компакция нет, но при определенных условиях среда может стать поровязкой. В них уравнения компакции вырождаются в уравнения обычной однофазной гидродинамики со сдвиговой вязкостью η , хотя среда по-прежнему остается двухфазной. Рассмотрим вначале граничные условия на внутренних границах Γ_{int} любого типа. Так же, как и основные уравнения, граничные условия на внутренних границах разделяются на общие и специальные. Общие условия для всех внутренних границ основываются на законах сохранения массы, энергии, импульса и других консервативных величин и сводятся к условиям непрерывности этих величин. Обычно на внутренних границах со структурно-фазовыми переходами непрерывна касательная скорость. Если граница смещается относительно среды, то из закона сохранения массы фаз следует, что пористость на этой границе терпит разрыв. При этом можно допустить на внутренней границе существование поверхностной нормальной силы σ_i молекулярной, электростатической или какой-нибудь другой природы. Тогда вектор напряжений на границе также терпит разрыв

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{int}} : \quad & [w_m^s]_{-}^{+} = 0, & \text{a)} \\ & [f\rho^f]_{-}^{+} u = [\rho^f s_n]_{-}^{+}, & \text{b)} \\ & [(1-f)\rho^s]_{-}^{+} u = [(1-f)\rho^s w_n^s]_{-}^{+}, & \text{c)} \\ & [\sigma_{ij} n_j]_{-}^{+} = \sigma_i, & \text{d)} \end{aligned} \tag{8.7.8}$$

где $[\tilde{\phi}]_{-}^{+} \equiv \tilde{\phi}_{+} - \tilde{\phi}_{-}$, $\tilde{\phi}_{\pm}$ – граничные значения некоторой величины $\tilde{\phi}$ на внутренней границе внутри и вне области компакции, $w_m^s = w_i^s m_i^{(\alpha)}$, $\vec{m}^{(\alpha)}$ – касательные единичные векторы; индекс α ($\alpha = 1, 2$) соответствует двум взаимно перпендикулярным направлениям на граничной поверхности, $\sigma_{ij} n_j$ – вектор напряжений; u – скорость движения границы этого типа относительно скелета пористой среды (направленная по нормали к границе).

Условия (8.7.8) носят общий характер. Рассмотрим некоторые их упрощения. При отсутствии фазовых переходов в самой матрице (при которых плотность ее меняется) скорость движения внутренней границы дается очевидным выражением

$$\Gamma_{\text{int}} : \quad [\rho^s]_{-}^{+} = 0, \quad u = -w_n^s. \tag{8.7.9}$$

Если пористость непрерывна и нет сосредоточенных сил, то эти условия упроща-

ются:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\text{int}} : \quad & \left[s_n \right]_{-}^{+} = 0, & \text{a)} \\
 & \left[w_n^s \right]_{-}^{+} = 0, & \text{b)} \\
 & \left[\sigma_{ij} n_j \right]_{-}^{+} = 0 \text{ или } \left[\sigma_{ij}^{ef} n_i n_j \right]_{-}^{+} = \left[p^f \right]_{-}^{+}. & \text{c)}
 \end{aligned} \tag{8.7.10}$$

Для внутренних границ возможно появление наступающего и отступающего фронтов. На наступающем фронте Γ_{int}^{+} задается дополнительное условие, которое определяет величину энергии, затрачиваемой на изменение микроструктуры [Каракин, 1999]. Скачок порового давления совершает работу, связанную с разрушением перегородок в поровом пространстве. В том случае, когда энергии для раскрытия пор не хватает, граница стоит на месте. Разрушение перегородок в общем случае происходит не мгновенно, а в течение некоторого времени, когда накапливаются дислокации и микро-разрушения. Этот процесс описывается некоторым кинетическим соотношением со своим характерным временем. Если время кинетических процессов соизмеримо со временем движения внутренней границы, то скорость продвижения границы будет зависеть от величины превышения пьезометрической составляющей порового давления своего критического значения. На отступающем фронте Γ_{int}^{-} происходит закрытие пор и высвобождение энергии, которая рассеивается в пространстве. Обе эти ситуации описываются соответствующими граничными условиями для наступающего и отступающего фронтов

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\text{int}}^{+} : \quad & f = f_{\min}, \quad (p^a - p_0) \mathfrak{G}(p^a - p_0) = \alpha_c u, \quad \alpha_c > 0, \quad p_0 > 0, & \text{a)} \\
 \Gamma_{\text{int}}^{-} : \quad & f = f_{\min}, & \text{b)}
 \end{aligned} \tag{8.7.11}$$

где p_0 – критическое значение порового давления, α_c – материальная константа, определяющая кинетику процесса разрушения пор, $\mathfrak{G}(p^a - p_0)$ – ступенчатая функция Хэвисайда.

8.7.3. Преобразование исходных уравнений

Другим инструментом упрощения (кроме вычитания гидростатической составляющей) является преобразование исходных уравнений (8.7.1) – (8.7.3) к другой, эквивалентной форме. Цель состоит в том, чтобы сделать возможным использование принципа неполной связности. Для этого произведем разбиение скорости пористой среды на потенциальную и соленоидальную составляющие и введем новые величины Π и Π^a

$$\begin{aligned}
 \vec{w}^s &= \text{grad} \phi + \vec{w}^{sol}, \quad \text{div} \vec{w}^{sol} = 0, & (8.7.12) \\
 \Pi &\equiv p^f - \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \nabla^2 \phi, \quad \Pi^a \equiv p^a - \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \nabla^2 \phi,
 \end{aligned}$$

где ϕ – скалярный потенциал скорости скелета. Тогда исходные уравнения (8.7.1) – (8.7.3) преобразуются к двум группам уравнений, связанным с этими составляющими.

С этой целью проведем преобразование исходных уравнений (8.7.1) – (8.7.3) к форме, допускающей суперпозицию этих составляющих общего решения. Выразим эту систему в скоростях (в одном случае, исключая градиент давления, а в другом – нет):

$$\eta \nabla^2 \vec{w}^s + \text{grad} \left[\left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \text{div} \vec{w}^s \right] - \text{grad} p^f + \rho \vec{g} = 0, \tag{8.7.13} \text{a)}$$

$$grad\left[\left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)div\vec{w}^s\right] + \eta\nabla^2\vec{w}^s = -\delta_p\vec{s} - \Delta\rho(1-f)\vec{g}, \quad b)$$

где $\Delta\rho \equiv \rho^s - \rho^f$ – разность плотности скелета и флюида. В правую часть выражения (8.7.13b) входит сила плавучести (архимедова сила), которая представляет собой неоднородный член уравнения движения. Именно этот неоднородный член не допускает статических состояний поровязких сред в поле силы тяжести.

Сложим уравнения непрерывности фаз (8.7.1b,c), считая, что источники отсутствуют,

$$div\vec{s} + div\vec{w}^s = 0 \text{ или } div\vec{s} + \nabla^2\phi = 0. \quad (8.7.14)$$

Воспользовавшись разложением скорости на потенциальную и соленоидальную части согласно (8.7.12), приходим к уравнению для соленоидальной составляющей, которое можно записать в различных формах,

$$\eta\nabla^2\vec{w}^{sol} + grad\left[\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\nabla^2\phi\right] - gradp^f + \rho\vec{g} = 0, \quad a) \quad (8.7.15)$$

$$\eta\nabla^2\vec{w}^{sol} - grad\Pi + \rho\vec{g} = 0. \quad b)$$

При малой пористости эти выражения можно упростить, вычитая в соответствующих величинах гидростатическую составляющую,

$$\eta\nabla^2\vec{w}^{sol} - \frac{\partial\Pi^a}{\partial x_i} = 0, \quad div\vec{w}^{sol} = 0. \quad (8.7.16)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями Стокса для несжимаемой жидкости. Их можно рассматривать как уравнения движения для соленоидальной составляющей. Они составляют первую группу уравнений.

Вычитая (8.7.16) из (8.7.15a) и исключая давление с помощью закона Дарси, получаем уравнение для фильтрационной составляющей

$$grad\left[\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\nabla^2\phi\right] + grad\Pi^f = -\delta_p\vec{s} - \Delta\rho\vec{g}. \quad (8.7.17)$$

Подставим в это уравнение выражения для материальных функций (8.7.5) и с помощью (8.7.14) исключим потенциал скорости ϕ с помощью последнего уравнения. Тогда получаем уравнение для скорости фильтрации. Это уравнение составляет основу второй, фильтрационной группы уравнений. Оно должно быть дополнено законом Дарси и уравнениями непрерывности, которые также должны быть приведены к удобной форме,

$$grad\left[\left(\frac{A_l}{f^l}\right)div\vec{s}\right] = \frac{B_k}{f^k}\vec{s} + \Delta\rho\vec{g} + grad\Pi^a, \quad \frac{\partial p^a}{\partial x_i} = -\delta s_i - \Delta\rho g_i, \quad a) \quad (8.7.18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + div\vec{s} = 0, \quad div\vec{s} + \nabla^2\phi = 0. \quad b)$$

Эти уравнения представляют собой тождественное преобразование исходных уравнений в приближении малой пористости. Более подробное описание этих преобразований содержится в оригинальных работах [Каракин, 1999, 2001].

8.8. Общие сведения по механике разрушения в верхних слоях коры

Здесь и ниже приводится обзор некоторых работ по механике разрушения. Подбор материала ограничен целью исследования процессов деформации и разрушения в

трещиноватых зонах верхней коры за геологические масштабы времени. Более подробную информацию о механике разрушения можно найти в специальных публикациях на эту тему [Гудман, 1987; Работнов, 1979].

Данные лабораторных исследований механических свойств горных пород на испытательных машинах, а также многочисленные геолого-геофизические данные, позволяют предположить, что в верхней коре, на глубинах до 15 км механизм образования трещиноватых зон в разломах и волноводах связан с упруго-хрупким разрушением, разуплотнением горных пород и последующим насыщением их флюидами (преимущественно водными). В пользу последнего утверждения говорят результаты геоэлектрических и сейсмических измерений. Известно, например, что некоторые сейсмические границы могут смещаться на значительные расстояния в течение нескольких месяцев. Обычно этот факт интерпретируется как следствие миграции флюидов.

Анализ процессов разрушения горных пород включает в себя следующие аспекты: 1) поиск условий разрушения, 2) исследование явлений предшествующих разрушению, 3) исследование процессов, происходящих после разрушения. Условия разрушения включают в себя некоторые дополнительные к определяющим уравнениям соотношения. Последние представляют собой либо критерий самого разрушения, либо критерий неустойчивости состояния, которое предшествует процессу разрушения. Критерий разрушения может быть локальным или глобальным.

К явлениям, предшествующим разрушению, можно отнести процессы усталости, старения и упрочнения материалов, т.е. зависимость прочностных свойств от времени. В пористых горных породах явления, связанные с разрушением, можно разделить на две группы. К первой группе относятся процессы, имеющие свои аналоги среди явлений, происходящих в условиях лабораторных экспериментов. Ко второй группе можно отнести явления, обусловленные целиком масштабным пространственно-временным эффектом. К ним относятся, в частности, процессы фильтрации в зоне разрушения. Характерные размеры и время фильтрации могут существенно превышать размеры и время лабораторных экспериментов и наблюдений в карьерах и шахтах. Вполне возможно, что именно явления второй группы играют основную роль в окрестности очага землетрясения до и после события.

Постразрушение чаще всего означает движение по уже заготовленной трещине или разлому. Предметом теории разрушения являются следующие действия: выбор и обоснование того или иного критерия, система представлений о способах достижения критического состояния разрушения или неустойчивости, а также описание процессов до и после разрушения. В ней различаются три направления:

- 1) теория прочности;
- 2) континуальный подход;
- 3) теория хрупкого разрушения с образованием и развитием индивидуальной трещины, а также законы движения по готовой трещине.

В настоящее время наиболее полно исследованы деформационно-прочностные свойства пород для самых верхних слоев до глубины 3 – 5 км (т.е. при сжимающих напряжениях порядка 50 – 150 МПа). В этом диапазоне давлений теория и эксперимент дают хорошее согласие. Теория прочности основывается на локальном критерии разрушения в сплошной среде. В момент квазистатического хрупкого разрушения в образце возникает трещина, которая подчиняется закону Кулона-Мора

$$\tau_{nm} = \tau_s - tg\beta\sigma_n, \quad (8.8.1)$$

где $\sigma_n \equiv \sigma_{ij}n_i n_j$ и $\tau_{nm} \equiv \tau_{ij}n_i m_j$ – нормальное и касательное напряжения на поверхности трещины, τ_{ij} – девиатор тензора напряжений σ_{ij} , \vec{n} и \vec{m} нормальный и касательный в направлении силы единичные векторы, $tg\beta$ – коэффициент трения, β – угол

внутреннего трения, τ_s – сила сцепления. Если силой сцепления можно пренебречь, то соотношение (8.8.1) называется законом Кулона-Амантона. Оно имеет следующий смысл. Разрушение в сплошной среде происходит тогда, когда найдется площадка в сплошной среде, на которой выполняется соотношение (8.8.1).

Этот закон достаточно хорошо подтверждается экспериментально для глубин соответствующих самым верхним слоям коры [Качанов, 1974; Гудман, 1987; Byerlee, 1978]. В этих экспериментах фиксировалось начало скольжения двух образцов горных пород друг относительно друга по гладкой поверхности контакта. Прочностные характеристики горных пород (в частности, сила сцепления τ_s) меняются в зависимости от глубины, водонасыщенности, времени нагружения и типа пород в широких пределах. Однако эксперименты проводились при сходных условиях, и все образцы дали близкие результаты с небольшим разбросом, за исключением некоторых глинистых пород. Конкретные значения параметров в этом соотношении зависят от приложенных нормальных напряжений:

$$\begin{aligned}\tau_s &= 0, \quad tg\beta = 0,85 \quad \text{при} \quad \sigma_n < 200 \text{ MPa}, \\ \tau_s &= 50 \text{ MPa}, \quad tg\beta = 0,6 \quad \text{при} \quad 200 \text{ MPa} < \sigma_n < 1700 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

В экспериментах по разрушению ненарушенных образцов сила сцепления τ_s , естественно, больше.

При наличии воды в трещине или разломе в законе Кулона-Мора вместо нормальных напряжений фигурируют эффективные нормальные напряжения $\sigma_n^{ef} = \sigma_n + \alpha_e p$. В момент разрушения и непосредственно перед ним микроструктура трещиновато-пористой среды может быть охарактеризована как "слабо связанная". Это означает, что можно положить $\alpha_e = 1$. Тогда критерий Кулона-Мора принимает вид

$$\tau_{nm} = \tau_s - tg\beta(\sigma_n + p), \quad (8.8.2)$$

Перепишем его в несколько иной форме, вводя новую величину – т.н. приведенное касательное напряжение $F \equiv \tau_{nm} + tg\beta(\sigma_n + p)$

$$F = \tau_s. \quad (8.8.3)$$

Событие происходит в тот момент, когда приведенное касательное напряжение F равняется некоторому критическому постоянному значению, равному пределу прочности пород.

Помимо закона Кулона-Мора, подробно исследованы условия предельного равновесия в клюве трещины. Основы механики трещин были заложены в классической работе [Griffith, 1920]. В этой теории используется глобальный критерий прочности для готовой трещины. Трещина может развиваться только тогда, когда приращение поверхностной энергии компенсируется освобождением упругой энергии. Это направление получило развитие в работах Си, Ирвина, Баренблатта, Черепанова и других исследователей. Для трещины в упругой среде критерий Гриффитса эквивалентен локальному критерию Ирвина, согласно которому трещина растет, если коэффициент интенсивности напряжений достигает своего критического значения. Особенно изящную и законченную форму эта теория приняла в работе Баренблатта [1959]. Получены выражения для коэффициентов интенсивности трещин различных типов (мод): трещин сдвига, отрыва и находящихся в режиме антиплоских деформаций.

В работе [Райс, 1982] и других аналогичных работах механика разрушения разлома фактически отождествляется с механикой разрушения трещины. При распространении трещины в упругой среде происходит ее разупрочнение. Схематически этот процесс изображен на рис. 65а, на котором показаны кривые напряжений и смещений Δu по границе трещины. У трещины есть статический $tg\beta_s$ и динамический $tg\beta_d$ коэффи-

коэффициенты трения. Область (зона разрушения), в которой происходит переход коэффициента трения от своего статического до динамического значения, соответствует процессу разупрочнения при скольжении. Плотность энергии разрушения G_c на единицу площади трещины на рис. 65б дается заштрихованной областью, ограниченной кривой напряжений $\sigma_{12} \equiv \tau$, отсчитываемой от уровня τ_d . Пространственный размер зоны разрушения обозначается как X_c . Он определяется выражением

$$X_c = C\mu D_c / [\sigma_n(f_s - f_d)],$$

где C – безразмерная константа (которая порядка 2-3), μ – сдвиговый модуль.

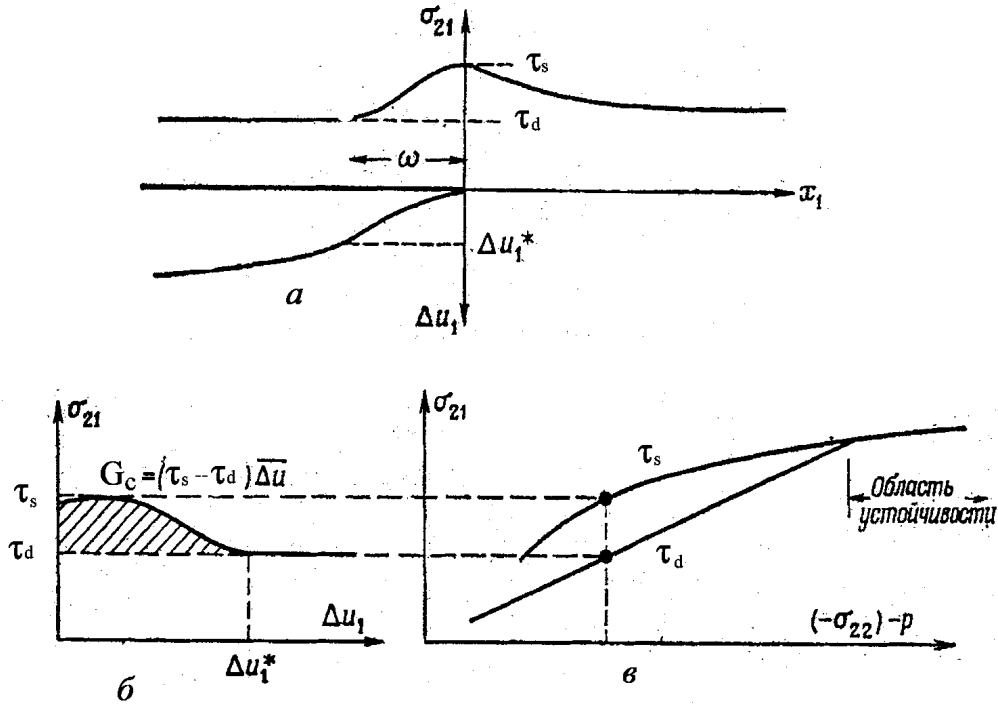


Рис. 65. Модели упрочнения в трещине по Дж. Райсу [1982]: а – распределения сдвигового напряжения σ_{12} и смещения Δu_1 при скольжении; б – зависимость сдвигового напряжения от скольжения; заштрихованная площадь соответствует энергии разрушения; в – зависимости статической τ_s и динамической τ_d сил трения от нормального эффективного напряжения.

Часто зону разрушения аппроксимируют треугольной формой

$$\begin{aligned} \text{tg}\beta &= \text{tg}\beta_s - (\text{tg}\beta_s - \text{tg}\beta_d)\Delta u / D_c \text{ при } \Delta u < D_c, \\ \text{tg}\beta &= \text{tg}\beta_d \text{ при } \Delta u > D_c. \end{aligned} \quad (8.8.4)$$

Здесь D_c – характерный размер области разупрочнения на оси смещений. Он определяется из лабораторных экспериментов. Величина D_c зависит от размера шероховатостей на скользящей поверхности. В экспериментах [Byerlee, 1967] она порядка $(10^{-6} - 5 \cdot 10^{-4})$ м.

Для указанной треугольной зоны разрушения значение энергии G_c было определено в лабораторных экспериментах при различных термодинамических условиях. Оно лежит в интервале $10^4 - 10^5$ Дж/м².

После разрушения могут возникнуть либо трещина, либо трещиноватый слой с особыми ослабленными свойствами. На границах трещины или разлома обычно задают-

ся тот или иной закон трения. Например, Дитрих ввел следующий закон, зависящий от скорости w скольжения границ:

$$\tau_{nm} = (\sigma_n - p) \left[c_0 + a \ln \frac{w}{w_0} + b \ln \frac{t}{t_0} \right]. \quad (8.8.5)$$

Здесь $c_0, a, b, w_0, t_0 c_0$, – константы модели, t – некий параметр, характеризующий время контакта неровностей поверхностей трещины. Этот параметр описывается кинетическими уравнениями. Есть две версии этих уравнений. В версии с замедлением фигурирует закон

$$\frac{dt}{dt} = 1 - \frac{wt}{d_0},$$

где d_0 – характерный размер области нагружения. В другой версии (скольжение с ускорением) предлагается следующее уравнение

$$\frac{dt}{dt} = - \left(\frac{wt}{d_0} \right) \ln \left(\frac{wt}{d_0} \right).$$

Были рассмотрены также различные альтернативные законы трения [Ruina, 1983] и многочисленные их варианты. В частности, рассматривались разломы в упругой среде Cowie et al. [1993], Sornette et al. [1994] и Ward [1996]. Это позволяло рассматривать процессы землетрясений совместно с распространением упругих волн. В этих работах были исследованы различные специфические процессы (эффект stick-slip, зависимость от скорости, времени и истории нагрузки и т.д.). Однако в них предполагается существование априори заданного разлома, по которому происходит скольжение. Это является определенным недостатком данного подхода, поскольку при этом не объяснялось само возникновение разлома.

Закон Кулона-Мора (8.8.3) можно считать достаточно универсальным в отношении возникновения одиночной трещины при хрупком разрушении. Он применим как в сплошной среде, так и в уже готовой трещине. Сложность его применения обусловлена двумя обстоятельствами. Предел прочности, входящий в этот закон, не является паспортной характеристикой вещества, а зависит от времени и режима нагружения, температуры и степени водонасыщенности пород. Например, в силу эффекта Ребиндера наличие воды резко снижает этот предел. Другая трудность состоит в том, что множество трещин может удовлетворять совсем другим законам разрушения, хотя каждая индивидуальная трещина подчиняется закону Кулона-Мора. В реальной ситуации мы всегда имеем дело именно с ансамблем трещин, которые взаимодействуют друг с другом.

В разломе в момент землетрясения возникает магистральный разрыв, который с точки зрения формального описания (как уже говорилось выше) отождествляют с моделью одиночной трещины. Однако следует заметить, что этот разрыв распространяется в трещиноватой среде. В процессе своего распространения он взаимодействует с уже существующими трещинами. Чисто теоретически поведение большого числа трещин можно было бы описать, усреднив их при условии их нелинейного взаимодействия. Эта задача наталкивается на значительные трудности и до сих пор не имеет удовлетворительного решения. Поэтому используются различные модели разрушения, основанные на феноменологическом подходе и эвристических соображениях. В частности, законы скольжения двух контактирующих тел типа (8.8.5) применяются и для разломов.

8.9. Континуальные теории разрушения

При развитии трещиноватости в сплошной среде в определенных условиях возникает некоторое состояние, которое описывается континуальной механикой. В данном со-

стоянии происходят накопление рассеянных повреждений (представленных в виде пор, трещин или дислокаций), их взаимодействие и эволюция. Дефекты могут появляться, исчезать и менять свои размеры. Их наличие может качественно изменить определяющие уравнения, а их состояние определяет режим полного разрушения сплошной среды.

Пусть \vec{u} есть вектор смещения в сплошной среде от некоторого начального к конечному состоянию. Конечное и начальное состояния соответственно описываются метриками g_{ij} и g_{ij}^0 . Разность между ними определяет тензор конечных деформаций Коши-Грина, который дается соотношением

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

Тензор деформаций делится на упругую ε_{ij}^e и пластическую (вязкую) ε_{ij}^p составляющие

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p.$$

Возможны два подхода к описанию режима, предшествующего разрушению. Один из них берет начало от теории пластичности и называется теорией повреждаемости. Истоки этого направления содержатся в работах [Качанов, 1958; Ильюшин, 1967; Райс, 1982]. Современное состояние вопроса можно найти в монографиях [Качанов, 1974; Никифорский, Шемякин, 1979; Кондауров, Никитин, 1990; Кондауров и др., 1987]. Кроме тензора деформаций вводится еще тензор повреждаемости ω_{ij} . Предполагается, что тензор напряжений является функцией текущих значений указанных кинематических величин

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \omega_{ij}). \quad (8.9.1)$$

Кроме того, вводятся еще закон пластического течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \Psi_{ij}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \omega_{ij}), \quad (8.9.2)$$

а также аналогичное соотношение для тензора повреждаемости

$$\dot{\omega}_{ij}^p = \Omega_{ij}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \omega_{ij}). \quad (8.9.3)$$

Область допустимых значений аргументов этих соотношений удовлетворяет неравенству, которое аналогично критерию прочности в теории пластичности,

$$\tilde{\Phi}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \omega_{ij}) \leq 0. \quad (8.9.4)$$

Соотношения (8.9.1) – (8.9.4) были конкретизированы в форме инфинитезимальных определяющих уравнений для малых приращений в целом ряде работ [Григорян, 1967; Николаевский, 1967, 1971; Rudnicki, Rice, 1975]. Выпишем для определенности определяющие уравнения теории дилатансии Райса [1984], которая описывает нагружение трещиновато-пористых насыщенных пород и разрушение ранее целой сплошной среды. В этой теории учитывается также поровое давление. Предполагается, что в сдвиговом режиме нагружения отличными от нуля являются лишь сдвиговая, нормальные и шаровая компоненты напряжений и деформаций. Ниже рассматривается дилатансионное нагружение в плоском горизонтальном слое. В этом слое ось x_1 направлена горизонтально, а ось x_3 – вертикально вверх. Применительно к этому слою определяющие уравнения дилатансии [Николаевский, 1967; Райс, 1982] для каждой из составляющих тензора деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} 2d\varepsilon_{13} &= 2d\varepsilon_{13}^p + d\sigma_{13}/\mu, & d\theta &= d\theta^p - [dP - (1 - K/K_s)dp]/K, & \text{a)} \\ 2d\varepsilon_{13}^p &= [d\sigma_{13} - tg\beta(dP - dp)]/G_p, & & & \text{b)} \end{aligned} \quad (8.9.5)$$

$$d\theta^p = \frac{\beta_d}{G_p} [d\sigma_{13} - tg\beta(dP - dp)], \quad P \equiv -\frac{1}{3}\sigma_{kk}. \quad c)$$

Здесь индекс p означает пластическую компоненту деформации, μ , K – мгновенный сдвиговый и объемный модули упругости пористой среды, P – давление в пористой среде, G_p – модуль неупругих касательных деформаций, β_d , $tg\beta$, – коэффициенты дилатансии и трения. Есть также еще одно уравнение, регулирующее изменение пористости.

Одно из важнейших следствий этой теории состоит в том, что в определенных условиях нагружения состояние является неустойчивым, и возникает бифуркация решения. При этом, наряду с гладкими, появляются разрывные решения, возникают полосы локализации деформаций, которые отождествляются с трещинами и разломами. Эти полосы локализации интерпретируются как трещины и разломы. Дилатансионные процессы расширения среды имеют принципиальное значение для динамики флюидов, поскольку их движение происходит, в основном, по проницаемым трещиноватым зонам. Уравнения (8.9.4), (8.9.5) описывают хрупко деформируемый режим пористой среды с ненарушенным скелетом до образования полос локализации деформаций.

Теория дилатансии Райса была подтверждена лабораторными экспериментами только для небольших глубин там, где возможна бифуркация решения с последующей локализацией деформаций в виде узких полос скольжения. В последние годы появились работы [Lyakhovsky et al., 1997; Lyakhovsky, 2001], где указанные соотношения выводятся, исходя из термодинамических функций, для которых принимаются некоторые предположения. В этих и последующих за ними работах проводятся конкретные расчеты разломных зон. Модель Ляховского (в отличие от модели Райса) позволяет описать локализацию деформаций как в узких, так и в широких полосах скольжения. Толщина полосы разрушения зависит от начальной формы разрушения. В случае узкой полосы критерий неустойчивости совпадает с аналогичным критерием неустойчивости в теории Райса.

Другой подход континуального направления отталкивается от принципов термодинамики и кинетики. Скорости полных и пластических деформаций совпадают в силу малости упругих деформаций. Второй подход близок теории фазовых переходов и обычно используется при описании волн сильного разрыва с помощью внутренней границы, отделяющей фазы с разными определяющими соотношениями [Григорян, 1977; Николаевский, 1984а,б; Слепян, 1977]. Такого рода границы называются *структурно-фазовыми*. Они были рассмотрены в третьем разделе данной главы.

8.10. Некоторые соотношения теоретической сейсмологии

Приведенные в предыдущей главе эмпирические соотношения между параметрами сейсмического процесса нуждаются в обосновании современными методами механики разрушения. Такое обоснование было дано в работе [Григорян, 1988]. В частности, в этой работе был дан ответ на вопрос, почему достижение критического состояния в очаге землетрясения происходит в динамическом, а не в статическом режиме.

В разломах мы имеем дело с трещиноватой средой, в которой происходит взаимодействие многих трещин. Можно предположить, что при грубом качественном анализе разлом можно описывать законом одной трещины (8.8.3). При крупных землетрясениях и статистическом подходе можно пренебречь нормальными напряжениями и поровым давлением как второстепенными факторами. Поэтому приведенное и обычное

касательные напряжения совпадают ($F = \tau \equiv \tau_{nm}$). Обозначим критическое значение этой величины как τ^* . После разрушения на поверхности разлома действует сила скольжения τ^{**} , которая меньше, чем τ^* . Эти величины аналогичны динамической τ_d и статической τ_s силам трения на границе индивидуальной трещины. Как было показано выше, при качественных рассуждениях эти величины можно отождествить. Однако соответствующие этим силам коэффициенты трения в трещине и разломе могут существенно отличаться.

Критическое состояние касательного напряжения τ^* достигается в результате очень медленных тектонических процессов, которые длятся миллионы лет. Более мелкие землетрясения связаны с поворотами сравнительно небольших блоков коры. Соответственно, они имеют меньшие временные масштабы. Тем не менее, их характерные времена тоже достаточно велики. В любом случае тектонические процессы не могут приспособиться к меньшему касательному напряжению скольжения τ^{**} . Для того, чтобы в зоне разлома сохранился баланс сил, необходимо учесть инерциальные силы, которые появляются при распространении разрыва со скоростью звука в горных породах. Это и есть причина возникновения землетрясений.

В момент прохождения фронта сейсмической волны через область разрушения, окружающую очаг, происходят следующие процессы. Система упругих напряжений и деформации, а также второстепенных разрывов в зоне очага и его ближайшей окрестности, приспособляются к значению касательного напряжения на разрыве, равном τ^{**} . Важно отметить, что приспособление носит существенно необратимый характер, поскольку второстепенные разрывы и подвижки по ним ликвидируют возникающие несогласия в новом напряженном состоянии. Поэтому после прохождения волны разрыва в зоне очага сохраняется касательное напряжение τ^{**} . Это сохранение гарантируется упомянутой уже инерционностью тектонических процессов. Поэтому мы имеем два напряженных состояния с упругими энергиями E^* , E^{**} , равными соответственно

$$E^* = \frac{(\tau^*)^2}{2\mu}, \quad E^{**} = \frac{(\tau^{**})^2}{2\mu}.$$

Изменение упругой энергии E в момент землетрясения дается разницей этих энергий в начале и конце события

$$E = E^* - E^{**} = e_0 V, \quad e_0 \equiv \frac{(\tau^*)^2 - (\tau^{**})^2}{2\mu}, \quad (8.10.1)$$

где e_0 плотность приращения упругой энергии.

Данное соотношение эквивалентно (7.3.6). Постоянство e_0 вытекает из постоянства сдвигового упругого модуля и обоих критических значений касательного напряжения.

При прохождении упругих волн со скоростью c_p за время t через массив горных пород с размером L имеем очевидное соотношение

$$c_p = \frac{L}{t}.$$

Эта простая формула фактически эквивалентна двум соотношениям (7.3.3) (7.3.5), если из них исключить магнитуду.

В терминах механики упруго-хрупкого разрушения можно дать интерпретацию обоим соотношениям (7.3.7), несколько отличную от той, которая приведена в главе 7. Будем считать, что блок коры, примыкающий к очагу землетрясений, нагружается удаленными силами. На удалении они создают смещение \vec{u} , направленное вдоль плоскости очага. Поверхности разрыва также подвергаются смещению u_0 . Будем считать, что

скорость смещений w постоянна. Тогда из элементарных кинематических соображений следует, что сдвиговая упругая деформация γ в блоке равна

$$\gamma = \frac{wt - u_0}{L}, \quad \tau = \mu\gamma. \quad (8.10.2)$$

Пусть толщина разлома равна h . Зона разлома заполнена трещиноватой ослабленной средой. Ее деформационные свойства можно охарактеризовать модулем деформации μ_0 . Деформация включает в себя упругую и пластическую составляющие. Поэтому можно ввести соответствующий модуль нагружения подобно тому, как это делается в теории дилатансии. Он определяется соотношением

$$\mu_0 = \frac{h\tau}{u_0}. \quad (8.10.3)$$

Модуль деформации меньше упругого модуля ненарушенной среды ($\mu_0 < \mu$), но не намного, поскольку в противном случае сейсмические подвижки были бы просто невозможны. В то же самое время относительная толщина разлома достаточно мала. В самом деле, толщина разлома порядка первых сотен метров или километра (в зависимости от его размера). Длина разломов колеблется от десятка километров (для слабых и умеренных землетрясений) до десятков тысяч километров. Будем считать, что

$$\frac{\mu}{\mu_0} \leq 10, \quad \frac{\mu h}{\mu_0 L} \ll 1. \quad (8.10.4)$$

Пусть разлом находится в субкритическом состоянии. При смещении по нему в момент времени $t = t^*$ достигается само критическое значение касательного напряжения $\tau = \tau^*$, и происходит сейсмическое событие. Комбинируя (8.10.2) и (8.10.3), получаем оценку времени подготовки землетрясения

$$t^* = \frac{L\tau^*}{w\mu} \left(1 + \frac{\mu h}{\mu_0 L} \right).$$

В силу приведенных выше неравенств это выражение можно упростить

$$t^* = \frac{L\tau^*}{w\mu} \equiv \frac{L\gamma^*}{w}. \quad (8.10.5)$$

Соотношения (8.10.5) и (7.3.7а) эквивалентны, если принять во внимание связь выражений (7.3.6) и (8.10.1).

Перейдем теперь к оценке времени предвестников землетрясений. Предвестники возникают тогда, когда деформация соответствующего блока коры $\tilde{\gamma}$ близка к критической деформации γ^* (определяемой формулой (8.10.5) при критическом значении напряжения), но еще не достигла ее. Это означает, что существует еще один критический порог напряжений τ , когда начинают возникать предвестниковые явления. Величина τ близка к τ^* , но несколько меньше ее и находится в интервале $\tau^{**} < \tau < \tau^*$. В момент достижения критического значения начинаются интенсивное образование трещин, акустическая и электромагнитная эмиссии, наблюдаемое свечение и другие процессы, предшествующие разрушению, которые воспринимаются как предвестники землетрясений. В этой фазе резко повышается проницаемость среды и возрастает роль фильтрационных процессов.

Очевидно, что скорость нарастания γ и $\tilde{\gamma}$ одна и та же, т.е. можно записать кинематическое соотношение, аналогичное первой формуле (8.10.2) при критических условиях (или формуле (8.10.5)),

$$\tilde{\gamma} = \frac{w\tilde{t}}{L}. \quad (8.10.6)$$

Подставляя в формулу $\Delta t = t^* - \tilde{t}$ выражения (8.10.5), (8.10.6), получаем

$$\Delta t = \frac{L}{w}(\gamma^* - \tilde{\gamma}) = t^* \left(1 - \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma^*}\right). \quad (8.10.7)$$

Принимая во внимание теоретический результат (8.10.6) и найденные эмпирическим путем соотношения (7.3.7b) и (7.3.8), можно сделать вывод о том, что деформации γ^* и $\tilde{\gamma}$ связаны соотношением

$$\gamma^* - \tilde{\gamma} = 0,1 \gamma^*. \quad (8.10.8)$$

Другими словами, предвестниковый режим начинается тогда, когда деформация достигает 90% от критического значения. Аналогичным образом интерпретируются другие явления, сопровождающие землетрясения.

Схема рассуждений С.С. Григоряна в целом согласуется с изложенной выше точкой зрения Райса, который отождествляет механику разрушения одиночной трещины с механикой разрушения в разломе. Единственное отличие заключается в том, что в схеме Райса отсутствует предвестниковый режим. Это представляется вполне естественным, поскольку он связан с взаимодействием ансамбля трещин.

Главный вывод, который мы можем сделать, заключается в следующем. Перед появлением магистрального разрыва в разломе в нем возникает некоторое особое состояние, которое мы называем *предразрушением*. Предразрушение характеризуется повышенной трещиноватостью и неустойчивым состоянием трещин. Его можно отождествить с α -стадией сейсмического процесса, описанной в разделе 7.3.2.4, в котором рассматривалась т.н. феноменологическая модель подготовки землетрясения. На этой стадии возникают световое или электромагнитное излучение в атмосфере или ионосфере, наклоны и разрывы земной поверхности и т.п. Данные явления можно рассматривать как предвестники землетрясений. Таким образом, состояние предразрушения в разломе можно рассматривать как физико-механическую основу предвестниковых процессов. Это состояние невозможно изучать в лабораторных условиях (при естественных значениях параметров), поскольку оно связано с масштабным фактором. Однако в природе оно может существовать не только в зоне очага землетрясения, но и иметь более широкое распространение.

В настоящее время не существует достаточно удовлетворительного объяснения факта существования листрических разломов, волноводов и предвестниковых процессов, исходя из уже существующих теорий разрушения. Имеется в виду достаточно строгий вывод, основанный на физических принципах. Очевидно, что при этом необходимо учесть термодинамические условия верхней коры и масштабный пространственно-временной фактор. Однако совершенно неясно, можно ли учесть эти факторы в рамках уже существующих теорий разрушения или необходимо создавать принципиально новые определяющие соотношения механики разрушения.

8.11. Роль флюидов при сейсмических процессах

Изложенные в предыдущем разделе представления теоретической сейсмологии основаны на механике сухого трения, когда флюиды не играют существенной роли. Это вполне обосновано для сильных землетрясений, у которых размер очага значительно превышает характерную длину фильтрационных процессов. Для умеренных землетрясений эти размеры могут совпасть. В этом случае следует учитывать взаимное влияние процессов упругого разрушения и фильтрации флюидов. Разрушающиеся трещины имеют тенденцию заполняться водой. Более того, вода является важным фак-

тором существования и изменения трещиноватой структуры среды. Поэтому разумно исследовать процесс предразрушения в условиях насыщения разлома водой.

В геофизической литературе проблеме миграции флюидов в окрестности очага землетрясения и влияния флюидов на сейсмический режим уделяется значительное внимание. Этому вопросу был посвящен специальный выпуск журнала *Journal of Geophysical Research* [Hickman et al., 1995]. Основным фактором считается поровое давление, которое согласно (8.8.2) снижает предел прочности. Были проведены полевые наблюдения разломов, выходящих на дневную поверхность [McCaig, 1988; Evans, 1990; Forster et al., 1994]. Эти наблюдения показали, что разломы интенсивно поглощают влагу, особенно в периоды активизации подвижек по ним. Было показано, что внезапный подъем флюидов по разлому может спровоцировать землетрясение. Было высказано предположение [Sleep, Blanpied, 1992, 1994] о том, что повышение порового давления в разломе основано на механизме пластической текучести, при которой происходит затекание пор. Поскольку отток флюида в окружающий массив ограничен, то происходит процесс компакций. Полевые наблюдения подтверждают, что обмен флюидами между разломом и вмещающим массивом ограничен вследствие различных физико-химических процессов, которые запечатывают стенки разлома [Sleep, Blanpied, 1992; Chester et al., 1993]. К аналогичным выводам приводят результаты лабораторных экспериментов [Blanpied et al., 1992]. Сибсон [Sibson, 1990], анализируя геологические данные, предположил, что переход от гидростатического давления к аномально высокому происходит вблизи рассмотренного выше реологического барьера, что согласуется со многими другими независимыми наблюдениями. Он считает, что этот барьер обусловлен процессами метаморфизма и дегидратации. Райс [Rice, 1992] высказал аналогичную точку зрения на процессы в разломах. Он считает, что реологический барьер в разломах связан с процессами пластической текучести. Влиянию миграции флюидов на сейсмический режим посвящены также работы [Miller et al., 1996; Henderson, Moillot, 1997; Yamashita, 1997, 1998].

В цитированных работах Ямашита исследовалась комплексная сейсмо-флюидная модель. В этих работах рассматривались одномерный и двумерный разломы, окруженные непроницаемым массивом горных пород. Для среды разлома задавался предел прочности Кулона-Мора (8.8.2) с учетом порового давления. Разлом был разбит на сегменты площадью $500 \times 550 \text{ м}^2$ с разными прочностными параметрами. Эти сегменты могут разрушаться независимо друг от друга, если в них превышен предел прочности. В плоскости разлома задаются уравнение пьезопроводности, условие непроницаемости на границе и некоторое начальное условие с повышенным поровым давлением на одном из сегментов, находящихся внизу разлома. По мнению автора, повышение давления обусловлено механизмом затекания пор, рассмотренным в работах [Sleep, Blanpied, 1992, 1994]. Далее рассматривались эволюция порового давления и процессы разрушения в отдельных сегментах разлома. Эта модель отражает характерный подход к динамике флюидов в верхней коре в большинстве современных работ по динамике флюидов. Движение флюидов задается априори, и затем рассматривается эволюция поровой среды. При этом обходится стороной вопрос о механизме возникновения этого движения. В техногенных процессах роль источника флюидов играет закачка воды в продуктивные скважины при разработке месторождений. Эта закачка является вынуждающим фактором, который и определяет режим техногенных землетрясений. Однако при исследовании природных процессов модель [Yamashita, 1997, 1998] представляется чрезмерно упрощенной. Важно понять не только, как происходит эволюция флюидной системы, но и почему возникает сам этот процесс.

Насыщенность флюидами и их фильтрация играют существенную роль в короткий промежуток времени Δt перед землетрясением, в течение которого возникают предвестники. Комбинируя соотношения (8.10.5) и (7.3.8), получаем

$$\Delta t = \frac{L \tau^*}{10w\mu}. \quad (8.11.1)$$

Время фильтрации Δt связано с масштабом длины L соотношением, вытекающим из уравнения пьезопроводности (8.4.16),

$$L^2 = \kappa_p \Delta t. \quad (8.11.2)$$

Согласно работе [Райс, 1982] входящий в уравнение (8.4.16) коэффициент пьезопроводности $\kappa_p \approx 0,1 - 1 \text{ м}^2/\text{сек}$. Исключая из (8.11.1) и (8.11.2) время Δt , получаем критическое значение длины очага землетрясения L^*

$$L^* = \frac{\kappa_p \tau^*}{10w\mu}. \quad (8.11.3)$$

При $L \gg L^*$ эффекты фильтрации не оказывают существенного влияния на режим разрушения в очаге. При $L \leq L^*$ фильтрацию следует учитывать.

Будем считать, что на разломе выполняется условие Кулона-Мора (8.8.2), учитывающее поровое давление флюидов. При отсутствии флюидов это выражение дает простой критерий момента возникновения землетрясения. Присутствие водной фазы флюидов несколько осложняет ситуацию, в результате чего разрушение проходит несколько стадий.

В промежутке времени Δt до момента возникновения землетрясения происходит сдвиг по разлому. При сдвиге резко меняется напряженное состояние в окрестности разлома, а в самом разломе и окружающей среде имеют место дилатансионные процессы. Поровое давление и сдвиговое напряжение падают, и, соответственно, приведенное касательное напряжение F опускается ниже своего критического значения. При этом разлом "запирается". Поскольку, кроме трещин, в окрестности очага есть еще водонасыщенные поры, то происходит переток воды из пор в трещины. В самом разломе поровое давление значительно меньше давления в указанной окрестности. Поэтому будет происходить значительный переток флюидов из трещинного пространства среды, вмещающей разлом, в сам разлом. Он будет продолжаться до тех пор, пока поровое давление в разломе не выровняется с поровым давлением окружающего пространства. В какой-то момент увеличение порового давления в разломе в силу эволюционного уравнения (8.4.16) приведет к нарушению равновесия. Далее уже ничто не может сдержать процесс разрушения. Именно в этот момент и происходит основное событие. Процесс "запирания" разлома и фильтрации в него жидкости, заканчивающийся сейсмическим событием, соответствует α -фазе сейсмического режима, описанного в седьмой главе (раздел 7.3.2.4).

Качественный анализ α -фазы позволяет сделать следующий вывод. Эта фаза предразрушения длится очень короткое время, измеряемое часами или сутками. В это время происходят очень интенсивные процессы микроразрушения как в разломе, так и в его ближайшей окрестности. Они сопровождаются наблюдаемым свечением, электромагнитной и акустической эмиссией и другими геофизическими аномалиями. Эти эффекты могут играть роль предвестников землетрясений. Однако не менее важная роль α -фазы состоит в том, что при этом происходит мобилизация флюидов в окрестности очага землетрясения. После сейсмического события в очаге образуется объем флюида под высоким давлением. Далее флюид рассеивается в окружающее пространство в направлении наибольшей проницаемости. Поскольку слабые и средние земле-

трясения происходят практически всегда и повсеместно, то этот процесс существенным образом влияет на флюидный режим верхней коры.

Можно предположить, что состояние предразрушения, соответствующее появлению α -фазы в сейсмическом процессе, тесно связано с флюидным режимом. Переток водного флюида из трещинного пространства, образовавшегося в окрестности очага землетрясения, несколько напоминает переток флюида в двухмасштабной модели Баренблатта [Баренблатт и др., 1960]. Однако в рассматриваемой ситуации динамика флюидов сопровождается изменением трещиноватой микроструктуры среды, т.е. увеличением или уменьшением трещинного пространства. В принципе, это могло бы быть описано уравнениями дилатансии Райса. Однако в теории Райса нет двухмасштабного процесса динамики флюидов. В этом случае для описания указанного явления α -фазы необходимо "сшивать" двухмасштабный процесс дилатансии в окружающей среде с состоянием, предвещающим разрушение в полосе локализации деформаций. Пока неясно, можно ли эту схему реализовать на основе уже существующих определяющих уравнений или требуется принципиально новый подход.